

VARIABLES ALEATOIRES – LOIS FONDAMENTALES – TD 1 – PROPOSITION DE CORRECTION

Exercice 1 Comparaison des résultats obtenus par la loi binomiale et par la loi de Poisson.

1. La loi binomiale $B(200 ; 0,005)$ $p=0,005$ (5 pour mille) et $q = 1 - p = 0,995$

Le formulaire nous donne $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Ici $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ou 5 et $n = 200$ soit

$$P(X=k) = C_{200}^k 0,005^k 0,995^{200-k}$$

2. La loi de Poisson P , avec $m = 200 \times 0,005 = 1$.

Le formulaire nous donne $P(X=k) = \frac{e^{-I} I^k}{k!}$ soit

Ici $I = 1$ et $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ou 5

$$P(X=k) = e^{-1} \frac{1}{k!}$$

En utilisant ces deux formules on obtient les résultats suivants :

Nombre d'articles k	Probabilité (Loi binomiale) $n = 200$	Probabilité (Loi de Poisson) $I = 1$
0	0,367	0,368
1	0,369	0,368
2	0,184	0,184
3	0,061	0,061
4	0,015	0,015
5	0,003	0,003

Rq : on s'aperçoit que les résultats sont quasiment identiques.

Exercice 2 - Utilisation de la loi normale

On utilise la variable centrée réduite T telle que $T = \frac{X-18}{2,5}$. Ainsi, T suit $N(0,1)$ et nous pouvons utiliser la table donnée dans le formulaire.

Comme $T = \frac{X-18}{2,5}$, on a $X = 2,5 T + 18$.

$$\underline{X < 17} \Leftrightarrow 2,5 T + 18 < 17 \quad \text{soit } T < -\frac{1}{2,5}, \text{ on a donc } T < -0,40$$

$$\begin{aligned} P(X < 17) &= P(T < -0,40) \\ &= \Phi(-0,40) \\ &= 1 - \Phi(0,40) \\ &= 1 - 0,655 \quad \text{soit} \end{aligned}$$

$$P(X < 17) = 0,345 \pm 10^{-3}$$

$$\underline{\underline{\triangleright X < 19}} \Leftrightarrow 2,5 T + 18 < 19 \quad \text{soit } T < \frac{1}{2,5}, \text{ on a donc } T < 0,40$$

$$\begin{aligned} P(X < 19) &= P(T < 0,40) \\ &= \Phi(0,40) \\ &= 1 - 0,655 \quad \text{soit} \end{aligned}$$

$$P(X < 19) = 0,655 \pm 10^{-3}$$

$$\underline{\underline{\triangleright X > 20}} \Leftrightarrow 2,5 T + 18 > 20 \quad \text{soit } T > \frac{2}{2,5}, \text{ on a donc } T > 0,80$$

$$\begin{aligned} P(X > 20) &= P(T > 0,8) \\ &= 1 - \Phi(0,80) \\ &= 1 - 0,788 \quad \text{soit} \end{aligned}$$

$$P(X > 20) = 0,212 \pm 10^{-3}$$

$$\underline{\underline{\triangleright 16 < X < 19,5}} \Leftrightarrow 16 < 2,5 T + 18 < 19,5$$

$$\Leftrightarrow -2 < 2,5 T < 1,5$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{2,5} < T < \frac{1}{2,5}$$

$$\Leftrightarrow -0,8 < T < 0,60$$

$$\text{On a donc } P(16 < X < 19,5) = P(-0,8 < T < 0,60)$$

$$= \Phi(0,60) - \Phi(-0,80)$$

$$= \Phi(0,60) - [1 - \Phi(0,80)]$$

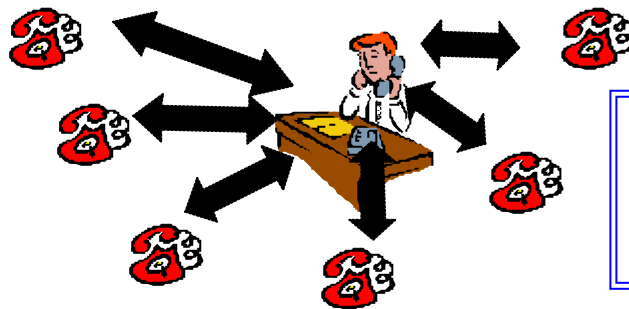
$$= \Phi(0,60) + \Phi(0,80) - 1$$

$$= 0,726 + 0,788 - 1$$

soit

$$P(16 < X < 19,5) = 0,514 \pm 10^{-3}$$

Exercice 3 – Temps d'attente clans un centre de renseignements



On utilise la variable centrée réduite :

$$T = \frac{X-18}{7,2} \quad \text{soit } X = 7,2 T + 18$$

1.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\triangleright P(X \leq 0)}} &= P(7,2T + 18 \leq 0) \\ &= P\left(T \leq -\frac{18}{7,2}\right) \\ &= P(T \leq -2,5) \\ &= \Phi(-2,5) \\ &= 1 - \Phi(2,5) \\ &= 1 - 0,994 \end{aligned}$$

$$P(X \leq 0) = 0,006 \pm 10^{-3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{➤ } \underline{\underline{P(X > 20)}} &= P(7,2T + 18 > 20) \\
 &= P\left(T > -\frac{2}{7,2}\right) \\
 &= P(T > 0,278) \\
 &= 1 - \Phi(0,278) \\
 &= 1 - 0,609
 \end{aligned}$$

$$P(X > 20) = 0,391 \pm 10^{-3}$$

2. Cinq appels, indépendants les uns des autres $\rightarrow Y$ suit une loi binomiale
 On a $p = 0,391$ (calculé au 1°, temps d'attente d'au moins 20s)
 On a $q = 1 - p = 0,609$

Donc Y suit $B(5 ; 0,391)$

$$\begin{aligned}
 \text{➤ } \underline{\underline{P(Y = 2)}} &= C_5^2 \cdot 0,391^2 \cdot 0,609^{5-2} \\
 &= 10 \cdot 0,391^2 \cdot 0,609^{5-2}
 \end{aligned}$$

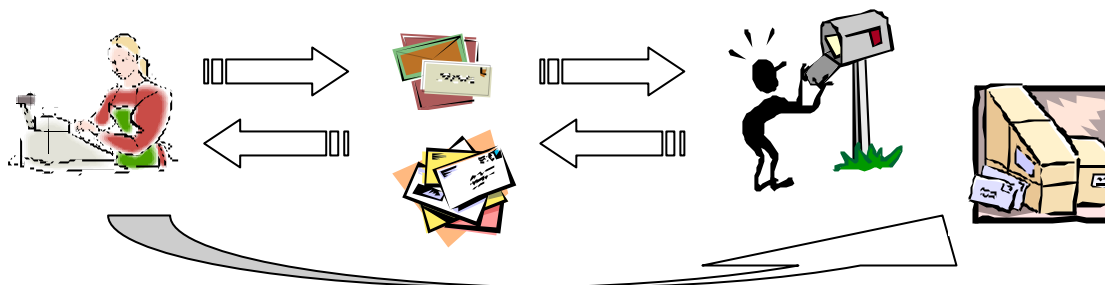
Soit $P(Y = 2) = 0,345 \pm 10^{-3}$

$$\begin{aligned}
 \text{➤ } \underline{\underline{P(Y \geq 1)}} &= 1 - P(Y=0) && \rightarrow \text{car } Y \text{ prend des valeurs entières.} \\
 &= 1 - 0,609^5
 \end{aligned}$$

Soit $P(\geq 1) = 0,916 \pm 10^{-3}$

TD 2 – PROPOSITION DE CORRECTION

Exercice 1 – Nombre de commandes suite à un envoi de documentation



Soit $n = 600$ \rightarrow Nombre total de documentations
 $p = 0,1$ \rightarrow Probabilité de commande
 $q = 1 - 0,1 = 0,9$ \rightarrow Probabilité de non commande

On a $n.p.q = 600 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 54$ On a donc $\sqrt{npq} \approx 7,35$

On peut donc utiliser la loi normale $N(60 ; 7,35)$

En prenant $T = \frac{X-60}{7,35}$ comme variable centrée réduite, on peut calculer les probabilités demandées.

1. Pour qu'il y ait au moins 70 commandes ?

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 70) &= P(7,35T + 60 \geq 70) \\
 &= P(T \geq \frac{10}{7,35}) \\
 &= P(T \geq 1,361) \\
 &= 1 - \Phi(1,361) \\
 &= 1 - 0,913 \quad \text{soit} \quad P(X \geq 70) = 0,087 \pm 10^{-3}
 \end{aligned}$$

2. Pour qu'il y ait plus de 50 commandes ?

$$\begin{aligned}
 P(X > 50) &= P(7,35T + 60 > 50) \\
 &= P(T > -\frac{10}{7,35}) \\
 &= P(T > -1,361) \\
 &= P(T < 1,361) \\
 &= \Phi(1,361) \quad \text{soit} \quad P(X > 50) = 0,913 \pm 10^{-3}
 \end{aligned}$$

Exercice 2 – Problème lié à la gestion des charges dans un immeuble



$$p = 0,06$$

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre retards de paiement pour un ensemble résidentiel comportant 210 appartements.

$$\text{On a } n = 210 ; p = 0,06 ; q = 1 - p = 0,94$$

On utilisera pour X la loi Binomiale $B(210 ; 0,06)$ et $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$$\text{Soit } P(X=k) = C_{210}^k 0,06^k 0,94^{210-k}$$

2. Peut-on approcher cette loi par une loi de Poisson ? Par une loi normale ?

Utilisation de la loi de Poisson :

On peut éventuellement approcher X par la loi de Poisson $P(12,6)$ mais en règle générale la loi de Poisson s'utilise pour un ensemble infini mais dénombrable et ici 210 appartements constituent un ensemble peu conséquent.

Utilisation de la loi Normale :

- La moyenne des règlements en retard est de 6% de 210 soit 12,6.
- L'écart type se calcule à partir de $s = \sqrt{npq}$
 $npq = 210 \cdot 0,06 \cdot 0,94 = 11,844$ d'où $s = \sqrt{11,84} \approx 3,44$

On peut donc approcher X par la loi normale $N(12,6 ; 3,44)$.

- 3.

Probabilité d'obtenir plus de 15 règlements en retard :

On utilise la loi Normale centrée réduite en de variable $T = \frac{X-m}{s}$ soit $T = \frac{X-12,6}{3,44}$, ce

$$\text{qui donne } X = 3,44 T + 12,6$$

$$X > 15 \Leftrightarrow 3,44 T + 12,6 > 15$$

$$\Leftrightarrow T > \frac{15-12,6}{3,44} \text{ soit } T > 0,698$$

$$P(X > 15) = P(T > 0,698)$$

$$= 1 - P(0,698)$$

$$= 1 - 0,758$$

soit

$$P(X > 15) = 0,242$$

Probabilité d'obtenir 9 règlements en retard :

On utilise la loi de Poisson $P(12,6)$ avec $k = 9$.

$$P(X = 9) = e^{-12,6} \frac{12,6^9}{9!} \quad \text{soit} \quad P(X = 9) = 0,074 \pm 10^{-3}$$

Rq : on n'utilise pas la loi normale pour cette question, en générale on utilise cette loi pour une contrainte bornée ($<$, $>$, \leq , \geq).

Exercice 3 - Application de la loi de Poisson et de la loi de Gauss - étude d'une fabrication

1. La machine produisant un nombre en théorie « infini » mais dénombrable de pièces, la loi de probabilité cherchée suit une loi de Poisson.

On a $npq = 1200 \times 0,003 \times 0,997 \approx 3,6$. On utilisera donc $P(3,6)$

2. On a $P(X = k) = e^{-3,6} \frac{3,6^k}{k!}$ on obtient 7 pièces défectueuses.

1^{ère} Méthode :

$$P(X = 7) = e^{-3,6} \frac{3,6^7}{7!} = 0,0425$$

$$\frac{7}{1200} = 0,0058 \quad \text{et} \quad 0,3\% \text{ de } 1200 = 3,6 \text{ (pour 7 obtenues)}$$

Il faut revoir le réglage

2^{ème} Méthode :

$$\begin{aligned} P(X \geq 7) &= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=6)] \\ &\approx 1 - (0,02732 + 0,09837 + 0,17706 + 0,21247 + 0,13768 + 0,08261) \\ &\approx 1 - 0,92673 \\ &\approx 0,07327 \end{aligned}$$

La probabilité obtenue est trop importante :

Il faut revoir le réglage

3. Même question avec $n=1200$, $p=0,015$ et $k=20$ pièces défectueuses, puis avec $k=30$.

$$npq = 17,73 \quad \text{et} \quad np = 18$$

On peut utiliser la loi normale $N(18, \sqrt{17,73})$ soit $N(18 ; 4,21)$ avec $T = \frac{X-18}{4,21}$

$$\begin{aligned} P(X \geq 20) &= \Phi(4,21T + 18 \geq 20) \\ &= \Phi\left(T \geq \frac{20-18}{4,21}\right) \\ &= \Phi(T \geq 0,48) \\ &= 1 - \Phi(0,48) \\ &= 1 - 0,68439 \\ &= 0,13561 \end{aligned}$$

$$P(X \geq 20) = 0,13561$$

$$\begin{aligned}P(X \geq 30) &= \Phi(4,21T + 18 \geq 30) \\&= \Phi\left(T \geq \frac{30-18}{4,21}\right) \\&= \Phi(T \geq 2,85) \\&= 1 - \Phi(2,85) \\&= 1 - 0,99781 \\&= 0,00219\end{aligned}$$

$$P(X \geq 30) = 0,00219$$

On s'aperçoit que l'augmentation du nombre de pièces défectueuses à partir de $k = 30$ amène une probabilité de défaillance acceptable, de l'ordre de 2 pour 1000, la machine est donc bien réglée, cela reste toutefois relatif, si le coût de fabrication des pièces et des composants amène un total élevé ...