



## TD 1 – APPLICATION DU COURS

### Proposition de correction



#### Exercice 1

$$u_{12} = u_0 + 12 r$$

$$= -1 + 12 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= -1 + 3$$

$$S_{12} = (12+1) \left( \frac{u_0 + u_{12}}{2} \right)$$

$$= 13 \cdot \frac{-1+2}{2}$$

$$u_{12} = 2 \quad \text{et} \quad S_{12} = \frac{13}{2}$$

#### Exercice 2

$$u_3 = u_0 + 3 \cdot r \Leftrightarrow$$

$$u_0 = u_3 - 3 r$$

$$= 2 - 3 \cdot (-3)$$

$$= 2 + 9$$

$$S_3 = (3+1) \left( \frac{u_0 + u_3}{2} \right)$$

$$= 4 \cdot \frac{11+2}{2}$$

$$= 2 \cdot 13$$

$$U_0 = 11 \quad \text{et} \quad S_3 = 26$$

#### Exercice 3

$$\begin{cases} u_2 = u_0 + 2 r \\ u_4 = u_0 + 4 r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 2 r = 10 \\ u_0 + 4 r = 30 \end{cases}$$

①

②

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 10 - 2 r \\ \cancel{(u_0 + 2 r)} - \cancel{(u_0 + 4 r)} = 10 - 30 \end{cases}$$

①

① – ②

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 10 - 2 r \\ -2 r = -20 \end{cases}$$

①

① – ②

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 10 - 2 (10) \\ r = 10 \end{cases}$$

①

① – ②

$$U_0 = -10 \quad \text{et} \quad r = 10$$

**Exercice 4**

$$u_1 = u_0 \cdot q \Leftrightarrow u_0 = \frac{u_1}{q} \quad u_5 = u_0 q^5$$

$$= \frac{2}{-5} \quad = u_1 q^4$$

$$= 2 \cdot (-5)^4$$

$$U_0 = -\frac{2}{5} \quad \text{et} \quad U_5 = 1250$$

**Exercice 5**

$$u_4 = u_0 \cdot q^4 \Leftrightarrow u_0 = \frac{u_4}{(\frac{1}{2})^4}$$

$$\Leftrightarrow u_0 = \frac{24 \cdot 2^4}{1^4}$$

$$U_0 = 384$$

**Exercice 6**

$$u_3 = u_0 \cdot q^3 \Leftrightarrow u_3 = u_1 \cdot q^2 \quad \text{et} \quad u_0 = \frac{u_3}{q^3}$$

$$\Leftrightarrow q^2 = \frac{u_3}{u_1}$$

$$\Leftrightarrow q^2 = \frac{49}{196}$$

$$\Leftrightarrow q = \pm \sqrt{\frac{49}{196}} \quad \text{soit}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{1}{2} \\ u_0 = 96 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} q = -\frac{1}{2} \\ u_0 = -96 \end{array} \right.$$

**Exercice 7**

$$1. \text{ On a } (u_{n+1} - u_n) = 2(u_{n+1} + u_n) \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 2u_{n+1} + 2u_n$$

$$\Leftrightarrow -u_n - 2u_n = 2u_{n+1} - u_{n+1}$$

Finalement

$$u_{n+1} = -3u_n \text{ donc } (u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } -3$$

$$2. u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left( \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$= u_0 \left[ \frac{1 - (-3)^{n+1}}{1 - (-3)} \right]$$

Finalement

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0}{2} [1 - (-3)^{n+1}]$$

3.  $(u_n)$  n'est pas monotone car sa raison est négative.

Rq :  $(u_n)$  change de signe une fois sur deux donc ne peut pas être monotone.

**Exercice 7**

$$\begin{aligned}
 1. \quad u_0 &= \frac{2.0+1}{(0+1)^2} \\
 u_1 &= \frac{2.1+1}{(1+1)^2} & (u_0) = 1 & (u_1) = \frac{3}{4} & (u_2) = \frac{5}{9} \\
 u_2 &= \frac{2.2+1}{(2+1)^2}
 \end{aligned}$$

2. La monotonie de  $(u_n)$  peut être déduite du signe de  $(u_{n+1}) - (u_n)$  :

$$\begin{aligned}
 (u_{n+1}) - (u_n) &= \frac{2(n+1)+1}{[(n+1)+1]^2} - \frac{2n+1}{(n+1)^2} \\
 &= \frac{2n+2+1}{(n+2)^2} - \frac{2n+1}{(n+1)^2} \\
 &= \frac{(n+1)^2(2n+3) - (2n+1)(n+2)^2}{(n+2)^2(n+1)^2} \quad \text{dont le signe n'est pas apparent ...}
 \end{aligned}$$

Posons alors  $f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$

Calculons  $f'(x)$  dont le signe nous donnera le sens de variation de la fonction  $f$ .

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{avec } u = 2x+1 \quad v = (x+1)^2 \\
 &\quad u' = 2 \quad v' = 2 \cdot (1) \cdot (x+1)^{2-1} \\
 &= \frac{2(x+1)^2 - (2x+1) \cdot 2(x+1)}{((x+1)^2)^2} \\
 &= \frac{2(x+1)[(x+1) - (2x+1)]}{(x+1)^4} \quad \text{mise en facteur de } 2(x+1) \\
 &= \frac{2(x+1)(-x)}{(x+1)^4} \quad \text{mise en facteur de } 2(x+1) \\
 &= \frac{-2x(x+1)}{(x+1)^4}
 \end{aligned}$$

On en déduit que  $f'(x) < 0$  donc que la fonction  $f$  est décroissante pour  $x > 0$

On a alors par restriction  $(u_n)$  strictement décroissante (car  $x > 0 \Rightarrow n > 0$ )

$(u_n)$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{N}$

3.  $(u_n)$  est strictement monotone à partir du rang 0

4.  $\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ strictement décroissante} \\ (u_n) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n) \text{ est convergente}$



## TD 2 – APPLICATION DIVERSES

### Proposition de correction



#### Exercice 1

**Soit  $(u_n)$  la suite cherchée :**

On a alors  $u_0 = 4\,500$   $r = 450$

La machine sera amortie lorsque la somme  $S_n$  des  $n$  annuités dépassera 20 000 €

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } S_n > 20\,000 &\Leftrightarrow (n+1) \left( \frac{u_0 + u_n}{2} \right) > 20\,000 \text{ d'inconnue } n \\
 &\Leftrightarrow (n+1) \left( \frac{u_0 + u_0 + nr}{2} \right) > 20\,000 \quad \text{car } u_n = u_0 + nr \\
 &\Leftrightarrow (n+1) \left( \frac{2u_0 + nr}{2} \right) > 20\,000 \\
 &\Leftrightarrow (n+1) (2u_0 + nr) > 40\,000 \\
 &\Leftrightarrow (n+1) (9000 + 450n) - 40\,000 > 0 \\
 &\Leftrightarrow 9000n + 450n^2 + 9000 + 450n - 40\,000 > 0 \\
 &\Leftrightarrow 450n^2 + 9450n - 31\,000 > 0 \\
 &\Leftrightarrow 50(9n^2 + 189n - 620) > 0 \\
 &\Leftrightarrow 9n^2 + 189n - 620 > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 189^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-620) \\
 &= 50\,8601 > 0 \text{ donc deux solutions.}
 \end{aligned}$$

$$n_1 = \frac{-189 - \sqrt{50601}}{2 \cdot 9} < 0 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-189 + \sqrt{50601}}{2 \cdot 9} > 0$$

On élimine  $n_1$  car on cherche  $n > 0$  (un nombre d'années...)

$$\text{On a donc } n = \frac{-189 + \sqrt{58041}}{2 \cdot 9} \approx 2,88 \text{ ce qui nous donne } n = 3 \text{ car } n \text{ est un entier.}$$

La machine sera donc amortie au bout de 4 ans.

**Exercice 2**

1. On a  $f(n+1) = 2 f(n)$  donc :

$f(n)$  est une suite géométrique :

- de premier terme  $f(1) = 250$
- de raison  $q = 2$

2. On a  $f(n) = f(0) q^n$  donc  $f(n) = f(1) q^{n-1}$

$$f(n) = 250 \cdot 2^{n-1}$$

$$\begin{aligned} 3. f(5) &= 250 \cdot 2^{5-1} \\ &= 250 \cdot 2^4 \end{aligned}$$

Au bout de 5 semaines consécutives le candidat gagne 4 000 €

**Exercice 3**

$$1. \quad u_1 = 12\,000 (1 + 0,07)^1$$

$$u_1 = 12\,840$$

$$u_2 = 12\,000 (1 + 0,07)^2$$

$$u_2 = 13\,738,80$$

$$\begin{aligned} 2. \quad u_{n+1} &= u_n + (u_n) (1 + \text{taux en décimal}) \\ &= u_n (1 + \text{taux en décimal}) \\ &= 1,07 u_n \quad \text{donc} \end{aligned}$$

$(u_n)$  est une suite géométrique :

- de premier terme 12000
  - et de raison 1,07
- On a donc :  $u_n = 12\,000 \times 1,07^n$

$$3. \quad \text{On a } v_0 = 15\,000 \text{ et } v_{n+1} = 1,03 v_n \text{ (car } v_{n+1} = v_n + \frac{3}{100} v_n)$$

$$\text{Comme au 2°) on obtient } v_n = 15\,000 \times 1,03^n$$

4. Monsieur DUPONT pourra effectivement s'offrir son véhicule lorsque ce qu'il dispose comme capital est supérieur ou égal à ce que coûte le véhicule, soit :

$$u_n > v_n \Leftrightarrow 12\,000 \times 1,07^n > 15\,000 \times 1,03^n$$

$$\Leftrightarrow 4 \times 1,07^n > 5 \times 1,03^n$$

$$\Leftrightarrow \ln(4 \times 1,07^n) > \ln(5 \times 1,03^n)$$

$$\Leftrightarrow \ln 4 + \ln 1,07^n > \ln 5 + \ln 1,03^n$$

$$\Leftrightarrow n \ln 1,07 - n \ln 1,03 > \ln 5 - \ln 4$$

$$\Leftrightarrow n (\ln 1,07 - \ln 1,03) > \ln 5 - \ln 4$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 5 - \ln 4}{\ln 1,07 - \ln 1,03} \text{ soit } n > 5,86$$

Monsieur DUPONT devra attendre 6 ans ... soit jusqu'en 2010