

**TD 1 – APPLICATION DU COURS – Limites Proposition de correction****Exercice 1 – Calculer la limite en 0 des fonctions suivantes :**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{0-2}{0-1} = \frac{-2}{-1} = 2$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2-1} = 2$$

b)  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \rightarrow \frac{0}{0} \rightarrow \text{F.I.}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x})^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}+1} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ si } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$$

c)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} \rightarrow \frac{0}{0} \rightarrow \text{F.I.}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1} \\ &= \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{x} \\ &= \sqrt{1+x}+1 \rightarrow 2 \text{ si } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = 2$$

d)  $f(x) = \frac{1-\cos x}{\tan^2 x} \rightarrow \frac{0}{0} \rightarrow \text{F.I.}$

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos x}{\tan^2 x} &= \frac{1-\cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\ &= (1-\cos x) \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\sim \frac{x^2}{2} \frac{(1-\frac{x^2}{2})^2}{x^2}$$

$$\sim \frac{1}{2} (1-\frac{x^2}{2})^2 \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{si } x \rightarrow 0$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \frac{1}{2}$$

e)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} \rightarrow \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle \rightarrow \text{F.I}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)} \\ &= \frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{1+x^2-1} \\ &= \frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} \rightarrow \left\langle \frac{2}{0} \right\rangle \end{aligned}$$

Donc

f n'admet pas de limite en 0

Rq : Si  $x \rightarrow 0^+$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  donc  $x = 0$  est asymptote verticale à la courbe de f.  
Si  $x \rightarrow 0^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$

f)  $f(x) = \frac{x-2}{x^2+5x+6}$

En -2 à gauche

Si  $x \rightarrow -2^-$  on est en -2 à gauche : on pose  $x = -2 - h$  et  $h \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} f(-2-h) &= \frac{-4}{(-2-h)^2+5(-2-h)+6} \\ &= \frac{-4}{h^2+4h+4-10-5h+6} \\ &= \frac{-4}{h^2+4h-5h} \\ &= \frac{-4}{h^2-h} \\ &= \frac{-4}{h(h-1)} \rightarrow \frac{-4}{0^+ \cdot -1^+} \rightarrow \frac{-4}{0^-} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-2}{x^2+5x+6} = +\infty$$

**En -2 à droite** : on pose  $x = -2 + h$  et  $h \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} f(-2+h) &= \frac{-4}{(-2+h)^2 + 5(-2+h) + 6} \\ &= \frac{-4}{h^2 - 4h + 4 - 10 + 5h + 6} \\ &= \frac{-4}{h^2 - 4h + 5h} \\ &= \frac{-4}{h^2 + h} \rightarrow \frac{-4}{0^+ + 0^+} \rightarrow \frac{-4}{0^+} \rightarrow -\infty \quad \text{car } h \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-2}{x^2+5x+6} = +\infty$$

### Exercice 2 – limites de fonctions de références

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x}\right) \text{ car en } +\infty \quad x+1 \sim x-1 \sim x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{12} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \quad \text{car } e^x \text{ « l'emporte » (voir formulaire)}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{12} e^{-x} = +\infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^4} = 0 \quad \text{car } \ln x \text{ « perd » (voir formulaire)}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^4} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \quad \text{car } e^x \text{ « l'emporte » (voir formulaire)}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^7} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^7} = +\infty$$

### Exercice 3 – Calculer les limites de fonctions rationnelles suivantes

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x} \quad \text{donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x-2}{x^2-1} = 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x} \quad \text{donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2+x}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{2} \quad \text{donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2+x}{2x-3} = \pm \infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x} \quad \text{donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = +\infty$$

Rq : on utilise la propriété sur la limite en  $\pm \infty$  d'une fonction rationnelle composée de deux polynômes pour a) b) et c).

### Exercice 4 – Limites et fonctions équivalentes

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{x(2+x)} \quad \text{si } x = 0 \quad f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

Comme  $x$  est voisin de 0, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{x(2+x)} &\sim \frac{\sqrt{x} \sqrt{x}}{x(2+x)} \quad \text{car } \sin x \sim x \\ &= \frac{x}{x(2+x)} \\ &= \frac{1}{2+x} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{x(2+x)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} \quad \text{Si } t = 0, f(t) = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

Comme  $t$  est voisin de 0, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos t}{t^2} &\sim \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} \\ &= \frac{t^2}{2t^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

c)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t}$  Si  $t = 0$ ,  $f(t) = \frac{0}{0}$  F.I

Comme t est voisin de 0, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos t}{\sin t} &\sim \frac{\frac{t^2}{2}}{t} \\ &= \frac{t^2}{2t} \\ &= \frac{t}{2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t} = 0$$

## TD 2 – APPLICATION DU COURS – Fonctions et asymptotes

### Proposition de correction

#### Exercice 1 – Limites et logarithmes :

1. Si  $x \rightarrow +\infty$   $f(x) \sim \ln \frac{x}{x}$  car  $x+2 \sim x$

Donc  $f(x) \sim \ln 1$  soit 0

Finalement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x+2}{x} \right) = 0$$

2. Comme  $y = f(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on a :

( $\Delta$ ) :  $y = 0$  est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$

3. Si  $x \rightarrow -2^-$   $\frac{x+2}{x} \rightarrow \frac{-2^-+2}{-2^-}$  soit  $\frac{0^-}{-2^-}$  soit  $0^+$

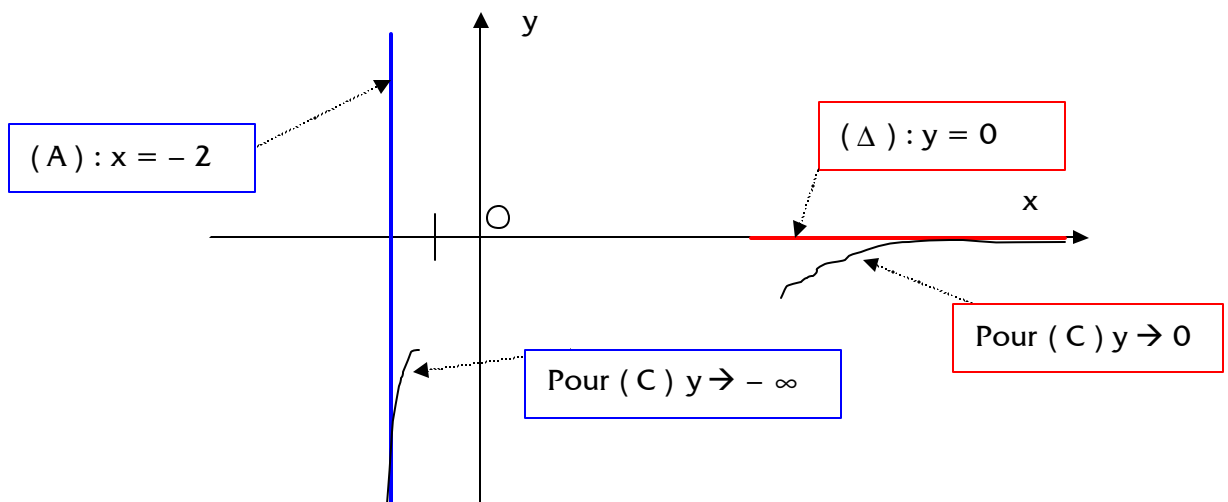
Donc  $f(x) = \ln \frac{x+2}{x} \rightarrow -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln \left( \frac{x+2}{x} \right) = -\infty$$

4. Comme  $y = f(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on a :

( $A$ ) :  $x = -2$  est **asymptote verticale** à la courbe représentative de  $f$

**Rq :** on a à l'aide de ces résultats des « morceaux » de la courbe de  $f$ .



## Exercice 2 – Limites et logarithmes :

1.  $f(x) = x + e^{-x}$

### Variations de f :



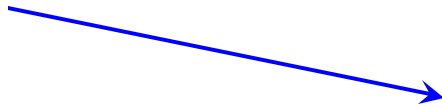

On calcule  $f'(x)$ , la dérivée de  $f(x)$  afin de déterminer son signe.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + (-1) \cdot e^{-x} \\ &= 1 - e^{-x} \\ &= 1 - \frac{1}{e^x} \end{aligned}$$

Finalement

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

Comme  $e^x$  est croissante et positive sur  $\mathbb{R}$ , sachant que  $e^0 = 1$ , on déduit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$			

Rq : il faut compléter ce tableau par la suite ... (valeurs particulières, limites aux bornes ...)

## 2. Démontrons que C admet une asymptote oblique :

$f(x) = x + e^{-x}$

On sait que  $e^{-x} \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow +\infty$

Donc pour  $x$  proche de  $+\infty$   $f(x) = x + \underbrace{e^{-x}}_{\sim 0}$

On a donc : **( $\Delta$ ) :  $y = x$  est asymptote oblique à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$**

### **Position de (C) par rapport à ( $\Delta$ ) :**

On détermine le signe de  $(C) - (\Delta)$  :

$$\begin{aligned} (C) - (\Delta) &= x + e^{-x} - x \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

Comme  $e^x$  est positive sur  $\mathbb{R}$ ,  $(C) - (\Delta) > 0$  sur  $\mathbb{R}$  donc :

**(C) est au dessus de ( $\Delta$ ) pour tout  $x$  réel**

3. Si C admet une tangente parallèle à  $y = -x + 3$ , appelons ( T ) cette tangente.

On a ( T ) :  $y = f' ( x_0 ) ( x - x_0 ) + f ( x_0 )$  équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse  $x_0$

Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur :

$$\begin{aligned} \text{On doit donc avoir } f' ( x_0 ) &= -1 & \Leftrightarrow & \frac{e^{x_0} - 1}{e^{x_0}} = -1 \\ & & \Leftrightarrow & e^{x_0} - 1 = -e^{x_0} \\ & & \Leftrightarrow & 2e^{x_0} = 1 \\ & & \Leftrightarrow & e^{x_0} = \frac{1}{2} \\ & & \Leftrightarrow & \ln e^{x_0} = \ln \frac{1}{2} \\ & & \Leftrightarrow & x_0 = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \end{aligned}$$

Finalement

$$x_0 = -\ln 2$$

$$\begin{aligned} \text{D'où ( T ) : } y &= -1 [ x - (-\ln 2) ] + -\ln 2 + e^{-(-\ln 2)} \\ &= -1 ( x + \ln 2 ) - \ln 2 + e^{\ln 2} \\ &= -x - \ln 2 - \ln 2 + 2 \end{aligned}$$

$$( T ) : y = -x + 2 - 2 \ln 2$$

