



TD 1 - APPLICATION DU COURS PROPOSITION DE CORRECTION



Exercice 1 - Résoudre les équations différentielles suivantes

a) $y' + y = 0$ avec $y(0) = 3$ Du type $ay' + by = 0$; $a = 1$; $b = 1$ **(Formulaire)**

Le formulaire donne $y = C \cdot e^{-F(t)}$ comme solutions de $y' + ay = 0$ avec $F(t)$ primitive de $\frac{b}{a}$

On a donc : $y = k e^{-t}$ puisque $F(t) = t$ est une primitive de $\frac{b}{a} = 1$

Condition Initiale (C.I) : $y(0) = 3$ soit $3 = k \cdot e^0 \Leftrightarrow k = 3$

Finalement

$y = 3 e^{-t}$

b) $y' + 5y = 0$ avec $y'(0) = 10e$ Du type $ay' + by = 0$; $a = 1$; $b = 5$

On donc $y = k e^{-5t}$ puisque $F(t) = 5t$ est primitive de $\frac{b}{a} = 5$ **(Formulaire)**

C.I : $y'(0) = 10e \Leftrightarrow -5k e^{-5 \cdot 0} = 10e$ car $y'(t) = -5k e^{-5t}$
 $\Leftrightarrow -5k = 10e$
 $\Leftrightarrow k = -2e$

Finalement

$y = -2e \cdot e^{-5t} = -2 e^{-5t+1}$

c) $13y' - 2y = 0$ avec $y(13) = e^2$ Du type $ay' + by = 0$; $a = 13$; $b = -2$

$y' + (-\frac{2}{13})y = 0$ d'où $y = k e^{\frac{2}{13}t}$ (On a $\frac{b}{a} = -\frac{2}{13}$)

C.I : $y(13) = e^2 \Leftrightarrow k \cdot e^2 = e^2$
 $\Leftrightarrow k = 1$

Finalement

$y = e^{\frac{2}{13}t}$

d) $y' - y \ln 3 = 0$ Du type $ay' + by = 0$; $a = 1$; $b = -\ln 3$

On obtient à l'aide du formulaire $y = k e^{x \ln 3}$ (On a $\frac{b}{a} = -\ln 3$)

C.I : $k \cdot e^{1 \cdot \ln 3} = 9 \Leftrightarrow k \cdot 3 = 9$
 $\Leftrightarrow k = 3$

Finalement

$y = 3e^{x \ln 3}$

e) $y' = \frac{2}{3} y \Leftrightarrow y' - \frac{2}{3} y = 0$  Du type $ay' + by = 0$; $a = 1$; $b = -\frac{2}{3}$

On obtient à l'aide du formulaire $y = C.e^{\frac{2}{3}t}$ (On a $\frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$)

C.I.: $\frac{2}{3} C e^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} = e \Leftrightarrow \frac{2}{3} C.e = e$
 $\Leftrightarrow C = \frac{3}{2}$

Finalement

$$y = \frac{3}{2} e^{\frac{2}{3}t}$$

Rappel: le coefficient directeur de la tangente en un point d'abscisse a est égal au nombre dérivé en ce point.

Exercice 2 – Résoudre les équations différentielles suivantes

a) $9y'' - 12y' + 4y = 0$; $y(1) = 0$ et $y'(0) = \frac{1}{3}$.

En utilisant le formulaire, on construit l'équation caractéristique :

$$9r^2 - 12r + 4 = 0$$

On a alors : $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$ qui a pour solution double :

$$r_0 = -\frac{(-12)}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

On a d'après le formulaire :

$$y = (I t + m) e^{r_0 t}$$

Soit

$$y(t) = (I t + m) e^{\frac{2}{3}t}$$

On calcule pour la suite : $y'(t) = I \cdot e^{\frac{2}{3}t} + (I t + m) \cdot \frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}t}$

Soit $y'(t) = (I + \frac{2}{3} m + \frac{2}{3} I t) e^{\frac{2}{3}t}$

Conditions Initiales :

et $y(1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (I \cdot 1 + m) e^{\frac{2}{3}} = 0 & \text{soit } I + m = 0 \text{ car } e^{\frac{2}{3}} \neq 0 \\ (I + \frac{2}{3} m + \frac{2}{3} I \cdot 0) e^{\frac{2}{3} \cdot 0} = \frac{1}{3} \end{cases}$
 $y'(0) = \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} I = -m \\ I + \frac{2}{3}m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I = -m \\ -m + \frac{2}{3}m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Soit $I = 1$ et $m = -1$

Finalement

$$y(t) = (-t+1)e^{\frac{2}{3}t}$$

b) $2y'' - 7y' - 15y = 0$; $y(0) = 3$ et $y'(0) = -1$.

Equation Caractéristique : $2r^2 - 7r - 15 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 49 + 120 = 169 > 0$ donc 2 solutions réelles r_1 et r_2 :

$$r_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{169}}{2 \cdot 2} = \frac{7-13}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{169}}{2 \cdot 2} = 5$$

On a d'après le formulaire :

$$y = I e^{r_1 x} + m e^{r_2 x}$$

Soit

$$y(t) = I e^{-\frac{3}{2}t} + m e^{5t}$$

On calcule pour la suite $y'(x) = -\frac{3}{2}I e^{-\frac{3}{2}x} + 5m e^{5x}$

Conditions Initiales :

$$\begin{aligned} \text{et} \quad y(0) = 3 & \Leftrightarrow \begin{cases} I e^0 + m e^0 = 3 \\ -\frac{3}{2}I e^0 + 5m e^0 = -1 \end{cases} \\ y'(0) = -1 & \Leftrightarrow \begin{cases} I + m = 3 \\ -\frac{3}{2}I + 5m = -1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} I + m = 3 \\ -3I + 10m = -2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} I = 3 - m \\ -3(3 - m) + 10m = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I = 3 - m \\ -9 + 3m + 10m = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I = 3 - m \\ 13m = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I = 3 - \frac{7}{13} = \frac{32}{13} \\ m = \frac{7}{13} \end{cases}$$

Finalement

$$y(t) = \frac{32}{13} e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{7}{13} e^{5x}$$



TD 2 – APPLICATION DU COURS PROPOSITION DE CORRECTION



Exercice 1 – Résoudre les équations différentielles suivantes

a) $2 y'' - 7 y' + 5 y = 2 t^2 + 3 t$

Première étape : recherche de yssm(t) : solution sans second membre (essm)

ESSM : $2 y'' - 7 y' + 5 y = 0$

Equation caractéristique : $1 r^2 - 7 r + 5 = 0$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 > 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{\Delta} = 3$$

Deux solutions $r_1 = \frac{-(-7)-3}{2 \cdot 2} = 1$ et $r_2 = \frac{-(-7)+3}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2}$

D'où

$$y_{ssm}(t) = 1 e^t + \frac{5}{2} e^{\frac{5}{2}t}$$

Deuxième étape : recherche de yp (t) : solution particulière

Le second membre $2 t^2 + 3 t$ est un polynôme de degré 2, les coefficients (2 ; -7 ; 5) de (E) sont différents de 0, on en conclue que yp (t) est un polynôme de degré 2.

Posons $y_p(t) = a t^2 + b t + g$ et cherchons **a** , **b** et **g**

On a $y'_p(t) = 2 a t + b$

Et $y''_p(t) = 2 a$

Si yp solution de (E) alors on doit avoir $2 y_p'' - 7 y_p' + 5 y_p = 2 t^2 + 3 t$

$$\Leftrightarrow 2(2 a) - 7(2 a t + b) + 5(a t^2 + b t + g) = 2 t^2 + 3 t$$

$$\Leftrightarrow 4 a - 14 a t - 7 b + 5 a t^2 + 5 b t + 5 g = 2 t^2 + 3 t$$

$$\Leftrightarrow (4 a - 7 b + 5 g) + (-14 a + 5 b) t + 5 a t^2 = 2 t^2 + 3 t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 a = 2 \\ (-14 a + 5 b) = 3 \\ 4 a - 7 b + 5 g = 0 \end{cases}$$

Identification des termes de degré 2
Identification des termes de degré 1
Identification des termes de degré 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \frac{2}{5} \\ (-14 \cdot \frac{2}{5} + 5 \mathbf{b}) = 3 \\ 4 \frac{2}{5} - 7 \mathbf{b} + 5 \mathbf{g} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \frac{2}{5} \\ 5 \mathbf{b} = 3 + \frac{28}{5} = \frac{43}{5} \\ 5 \mathbf{g} = \frac{8}{5} + 7 \mathbf{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \frac{2}{5} \\ \mathbf{b} = \frac{43}{25} \\ 5 \mathbf{g} = \frac{8}{5} + 7 \frac{43}{25} = \frac{40}{25} + \frac{301}{25} = \frac{341}{25} \quad \text{soit} \quad \mathbf{g} = \frac{341}{125} \end{cases}$$

On a donc

$$y_p(t) = \frac{2}{5} t^2 + \frac{43}{25} t + \frac{341}{125}$$

Finalement

$$y(t) = \underbrace{I e^t + m e^{\frac{5}{2}t}}_{y_{ssm}(t)} + \underbrace{\frac{2}{5} t^2 + \frac{43}{25} t + \frac{341}{125}}_{y_p(t)}$$

 $y_{ssm}(t)$ $y_p(t)$

b) $x'' + 4x' + 8x = 3 \sin t - \cos t$

Première étape : recherche de $y_{ssm}(t)$: solution sans second membre (essm)

ESSM

:

$$x'' + 4x' + 8x = 0$$

Equation caractéristique :

$$1 r^2 + 4 r + 8 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -16 < 0 \quad \Delta = 16 i^2$$

On trouve $r_1 = -2 + 2i$ et $r_2 = -2 - 2i$ (Soit $\mathbf{a} = -2$ et $\mathbf{b} = 2$)

On a donc :

$$y_{ssm}(t) = (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) e^{-2t}$$

Deuxième étape : recherche de $x_p(t)$: solution particulière

Le second membre est égal à $3 \sin t - \cos t$ on en conclue que $y_p(t) = A \sin t + B \cos t$

Posons $x_p(t) = A \sin t + B \cos t$ et **cherchons A et B (réels)**

On a $x_p'(t) = A \cos t - B \sin t$

puis $x_p''(t) = -A \sin t - B \cos t$

Si x_p solution de (E) alors on doit avoir $x_p'' + 4x_p' + 8x_p = 3 \sin t - \cos t$

$$\Leftrightarrow -A \sin t - B \cos t + 4(A \cos t - B \sin t) + 8(A \sin t + B \cos t) = 3 \sin t - \cos t$$

$$\Leftrightarrow -A \sin t - B \cos t + 4A \cos t - 4B \sin t + 8A \sin t + 8B \cos t = 3 \sin t - \cos t$$

$$\Leftrightarrow (-A - 4B + 8A) \sin t + (-B + 4A + 8B) \cos t = 3 \sin t + (-1) \cos t$$

$$\Leftrightarrow (7A - 4B) \sin t + (4A + 7B) \cos t = 3 \sin t + (-1) \cos t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7A - 4B) = 3 & \textcircled{1} \\ 4A + 7B = -1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 49A - 28B = 21 & 7 \times \textcircled{1} \\ 16A + 28B = -4 & 4 \times \textcircled{2} \end{cases}$$

En additionnant 7 x ① et 4 x ② on obtient

$$49A - 28B + 16A + 28B = 21 - 4 \text{ soit } 65A = 17 \quad \text{d'où}$$

$$A = \frac{17}{65}$$

En remplaçant A par dans ② on obtient

$$7B = -1 - 4 \frac{17}{65} = \frac{-65 - 68}{65} = \frac{-133}{65} \text{ Soit } B = \frac{-133}{65 \cdot 7} \text{ soit}$$

$$B = -\frac{19}{65}$$

D'où

$$x_p(t) = \frac{17}{65} \sin t - \frac{19}{65} \cos t$$

Finalement la solution générale est :

$$x(t) = (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) e^{-2t} + \frac{17}{65} \sin t - \frac{19}{65} \cos t$$

$x_{ssm}(t)$

$x_p(t)$

c) $x y' + 2 y = \frac{2}{x(x+1)}$ (y est une fonction de x)

Première étape : recherche de yssm(t) : solution sans second membre (essm)

ESSM :

$$\begin{aligned}
 x y' + 2 y &= 0 \\
 \Leftrightarrow x \frac{y'}{y} + 2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x \frac{y'}{y} &= -2 \\
 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} &= -2 \cdot \frac{1}{x} \\
 \Leftrightarrow \ln y &= -2 \ln x + C \\
 \Leftrightarrow \ln y &= \ln (x^{-2}) + C \\
 \Leftrightarrow \ln y &= \ln (x^{-2}) + \ln C1 \quad \text{avec } \ln C1 = C \\
 \Leftrightarrow \ln y &= \ln (C1 x^{-2}) \\
 \Leftrightarrow \ln y &= \ln \left(\frac{C1}{x^2} \right) \\
 \Leftrightarrow y &= \frac{C1}{x^2}
 \end{aligned}$$

Finalement

$$y_{ssm}(x) = \frac{C1}{x^2}$$

Deuxième étape : recherche de yp (t) : solution particulière

Le second membre étant d'une forme «non classique» on utilise la méthode dite de «variation de la constante».

- On pose $yp = \frac{z}{x^2}$
- On cherche z qui est la variable qui « remplace » la constante C1 de yssm

On a $yp'(x) = \frac{z'x^2 - z \cdot 2x}{x^4}$

On remplace yp et yp' dans (E)

$$\begin{aligned}
 x \left(\frac{z'x^2 - z \cdot 2x}{x^4} \right) + 2 \frac{z}{x^2} &= \frac{2}{x(x+1)} \Leftrightarrow \frac{z'x^2 - z \cdot 2x}{x^3} + 2 \frac{z}{x^2} = \frac{2}{x(x+1)} \\
 \Leftrightarrow \frac{z'}{x} - 2 \frac{z}{x^2} + 2 \frac{z}{x^2} &= \frac{2}{x(x+1)}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'}{x} = \frac{2}{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow z' = 2 \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow z = 2 \ln(x+1) + c_1 \quad (c_1, \text{ constante réelle})$$

$$\Leftrightarrow z = \ln[(x+1)^2] + \ln c_2$$

$$\Leftrightarrow z = \ln[c_2 (x+1)^2]$$

Comme $yp = \frac{z}{x^2}$, on a finalement

$$yp(x) = \frac{\ln[c_2 (x+1)^2]}{x^2}$$

Finalement la solution générale est :

$$yg(t) = \underbrace{\frac{c_1}{x^2}}_{y_{ssm}(x)} + \underbrace{\frac{\ln[c_2 (x+1)^2]}{x^2}}_{yp(x)}$$

Exercice 2

$$(E): 3y' - 7y = 2e^{-x}.$$

$$\begin{aligned} 1. \quad y_1 = a e^{-x} \text{ solution de } (E) & \Leftrightarrow y_1 \text{ vérifie } (E) \\ & \Leftrightarrow 3y_1' - 7y_1 = 2e^{-x}. \\ & \Leftrightarrow 3[a \cdot (-1)e^{-x}] - 7a e^{-x} = 2e^{-x}. \\ & \Leftrightarrow -3a e^{-x} - 7a e^{-x} = 2e^{-x}. \\ & \Leftrightarrow -10a e^{-x} = 2e^{-x}. \\ & \Leftrightarrow -10a = 2 \\ & \Leftrightarrow a = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Soit

$$y_1(x) = -\frac{1}{5} e^{-x}$$

2. Montrez que y est solution de (E) si et seulement si $y - y_1$ est solution de l'équation différentielle $(E') : 3y' - 7y = 0$.

$$\begin{aligned}
 y - y_1 \text{ solution de } (E') &\Leftrightarrow y - y_1 \text{ vérifie } (E') \\
 &\Leftrightarrow 3(y - y_1)' - 7(y - y_1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3y' - 3y_1' - 7y + 7y_1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3y' - 7y - (3y_1' - 7y_1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3y' - 7y - 2e^{-x} = 0 \quad \text{car } y_1 \text{ solution de } (E) \\
 &\Leftrightarrow 3y' - 7y = 2e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow y \text{ solution de } (E)
 \end{aligned}$$

Finalement y solution de (E) si et seulement si $y - y_1$ solution de (E')

Résolution de (E') : $3y' - 7y = 0$

A l'aide du **formulaire** on obtient comme solution générale sans second membre :

$$y(x) = k e^{\frac{7}{3}x}$$

Finalement la solution générale est :

$$y_g(x) = \underbrace{k e^{\frac{7}{3}x}}_{y(x)} - \underbrace{\frac{1}{5} e^{-x}}_{y_1(x)}$$

C.I : $y(0) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow k e^0 - \frac{1}{5} e^0 = \frac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow k - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

Finalement $f(x) = e^{\frac{7}{3}x} - \frac{1}{5} e^{-x}$

Exercice 3

$$(E) : y'' + 16y = 2 \sin 2x - 3 \cos 2x.$$

Première étape : recherche de yssm (x) : solution sans second membre (essm)

ESSM : $y'' + 16y = 0$

Equation caractéristique : $r^2 + 16 = 0$ soit $r_1 = 0 + 4i$ et $r_2 = 0 - 4i$

On a donc $a=0$ et $b=4$

Le **formulaire** nous donne $y_{ssm}(x) = e^{ax} (1 \cos bx + m \sin bx)$

Soit

$$y_{ssm}(x) = 1 \cos 4x + m \sin 4x$$

Deuxième étape : recherche de $y_p(x)$: solution particulière

Le second membre est $2 \sin 2x - 3 \cos 2x$, on cherche donc $y_p(x)$ de la même forme.

On pose donc $y_p(x) = A \sin 2x + B \cos 2x$ et **on cherche A et B réels.**

On a : $y_p(x) = A \sin 2x + B \cos 2x$

On obtient : $y_p'(x) = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$

Puis : $y_p''(x) = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$

On remplace $y_p(x)$ et $y_p''(x)$ dans (E)

$$y'' + 16y = 2 \sin 2x - 3 \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow (-4A \sin 2x - 4B \cos 2x) + 16(A \sin 2x + B \cos 2x) = 2 \sin 2x - 3 \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 12A \sin 2x + 12B \cos 2x = 2 \sin 2x - 3 \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 12A = 2 \quad \text{et} \quad 12B = -3$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1}{4}$$

On a donc

$$y_p(x) = \frac{1}{6} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x$$

Finalement la solution générale est :

$$y_g(x) = 1 \cos 4x + m \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x$$

$y_{ssm}(x)$

$y_p(x)$



TD 3 – DU COTE DE L'EXAMEN ...



Exercice 1 – D'après BTS MAVA 2004 – Exercice 2 – Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + (0,4x)y = 0,4x$ où y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. (E₀) : $y' + (0,4x)y = 0$

$a = 1$ $b = 0,4x$ donc $\frac{b}{a} = 0,4x$ $G(x) = 0,4 \frac{x^2}{2} = 0,2x^2$ est une primitive de $\frac{b}{a}$.

Le **formulaire** nous donne comme solutions : $y(x) = k e^{-0,2x^2}$

2. Si $h(x) = 1$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E) alors $h(x)$ doit vérifier (E)

$h(x) = 1$ soit $h'(x) = 0$

On a
$$\begin{aligned} h'(x) + 0,4x h(x) &= 0 + 0,4x \cdot 1 \\ &= 0,4x \end{aligned}$$

Donc $h(x) = 1$ est une solution particulière de (E)

3. Les solutions $f(x)$ de (E) sont donc de la forme : $f(x) = k e^{-0,2x^2} + 1$

4. Si $F(x) = 1 - e^{-0,2x^2}$, on a bien :

$F(x) = 1 - 1 e^{-0,2x^2}$ du même type que $f(x)$ donc solution de (E) (On a $k = 1$)

$F(0) = 1 - 1 \cdot e^0 = 1 - 1 = 0$ ce qui vérifie la condition initiale donnée.

Exercice 2 – D'après BTS MAVA 2003 – Exercice 2 – Partie A

(E) : $y' + y = 2e^{-x}$

1. (E₀) : $y' + y = 0$ Du type $ay' + by = 0$; $a = 1$; $b = 1$ (**Formulaire**)

$G(x) = x$ est une primitive de $\frac{b}{a}$

Le **formulaire** nous donne $y = k e^{-x}$ comme solutions de (E₀)

2. Si $h(x) = 2x e^{-x}$ solution particulière de (E) alors $h(x)$ doit vérifier (E)

$$\begin{aligned} \text{On a : } h(x) &= 2x e^{-x} \text{ d'où } h'(x) &= 2e^{-x} + 2x(-e^{-x}) \\ & &= 2(1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x) + h(x) &= 2(1-x)e^{-x} + 2xe^{-x} \\ &= 2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2xe^{-x} \\ &= 2e^{-x} \end{aligned}$$

Donc

$$h(x) = 2x e^{-x} \text{ est bien solution particulière de (E)}$$

3. On a donc $f(x)$ comme solution générale de (E) : $f(x) = k e^{-x} + 2x e^{-x}$

Soit

$$f(x) = (2x + k) e^{-x}$$

$$\begin{aligned} 4. f(0) = 3 &\Leftrightarrow (2 \cdot 0 + k) e^{-0} = 3 \\ &\Leftrightarrow k \cdot 1 = 3 \quad \text{soit } k = 3 \end{aligned}$$

Finalement

$$f(x) = (2x + 3) e^{-x}$$

Exercice 3 – D'après BTS MAVA 2002 – Exercice 2 – Partie A

$$(E) : y'' - y' - 2y = (-6x - 4) e^{-x}$$

$$1. (E_0) : y'' - y' - 2y = 0.$$

Equation caractéristique : $r^2 - r - 2 = 0 \quad \Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9 > 0$
 Soit $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$

Le **formulaire** nous donne

$$y(x) = l e^{-x} + m e^{2x}$$

2. $h(x) = (x^2 + 2x) e^{-x}$ solution particulière de (E) $\Leftrightarrow h(x)$ vérifie (E)

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x + 2) e^{-x} + (x^2 + 2x)(-1)e^{-x} \\ h'(x) &= e^{-x} (-x^2 + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= (-1) e^{-x} (-x^2 + 2) + e^{-x} (-2x) \\ h''(x) &= -e^{-x} (-x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(x) - h'(x) - 2h(x) &= -e^{-x} (-x^2 + 2x + 2) - e^{-x} (-x^2 + 2) - 2(x^2 + 2x) e^{-x} \\ &= e^{-x} (x^2 - 2x - 2 + x^2 - 2 - 2x^2 - 4x) \\ &= e^{-x} (-6x - 4) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } h(x) = (x^2 + 2x) e^{-x} \text{ solution particulière de (E)}$$

3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est donc donné par :

$$y_g(x) = 1 e^{-x} + m e^{2x} + (x^2 + 2x) e^{-x}$$

$$y_g(x) = (x^2 + 2x + 1) e^{-x} + m e^{2x}$$

4. f solution de (E) vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (0^2 + 2 \cdot 0 + 1) e^{-0} + m e^{2 \cdot 0} = 1 \\ (2 \cdot 0 + 2) e^{-0} + (0^2 + 2 \cdot 0 + 1) \cdot (-) e^{-0} + 2 m e^{2 \cdot 0} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot 1 + m \cdot 1 = 1 \\ 2 \cdot 1 - 1 + 2 m \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m = 1 \\ 2 - 1 + 2 m = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -m \\ 2 + m + 2 m = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -m \\ 3 m = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -\frac{1}{3} \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$f(x) = (x^2 + 2x + \frac{1}{3}) e^{-x} - \frac{1}{3} e^{2x}$$