

TD1 – PROPOSITION DE CORRECTION

a) $f(x) = e^x - 2\sqrt{1+x}$ $n = 2$

$$DL_0^2 f(x) = e^x - 2(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$DL_0^2 f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2 e^1(x) - 2 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + x^2 e^{\frac{1}{2}}(x) \right)$$

$$DL_0^2 f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2 e^1(x) - 2 \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 e^{\frac{1}{2}}(x) \right)$$

$$DL_0^2 f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 e^1(x) - 2 - x + \frac{x^2}{4} - 2x^2 e^{\frac{1}{2}}(x)$$

$$DL_0^2 f(x) = -1 + \frac{3x^2}{4} + x^2(e^1(x) - e^{\frac{1}{2}}(x))$$

$$DL_0^2 f(x) = -1 + \frac{3x^2}{4} + x^2 e(x) \text{ en posant } e(x) = e^1(x) - e^{\frac{1}{2}}(x)$$

Equation de tangente en 0 :

$$y = -1$$

Position de (C) par rapport à (T) :

$$-1 + \frac{3x^2}{4} - (-1) = \frac{3x^2}{4} > 0$$

Donc (C) au dessus de (T) pour tout x réel.

b) $f(x) = \sqrt{1-x}$ $n = 2$

$$DL_0^2 f(x) = (1+(-x))^{\frac{1}{2}}$$

$$DL_0^2 f(x) = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}(-x) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-x)^2 + x^2 e^{\frac{1}{2}}(x)$$

$$DL_0^2 f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + x^2 e^{\frac{1}{2}}(x)$$

Equation de tangente en 0 :

$$y = 1 - \frac{1}{2}x$$

Position de (C) par rapport à (T) :

$$1 - \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} - (1 - \frac{1}{2}x) = -\frac{x^2}{8} < 0$$

Donc (C) en dessous de (T) pour tout x réel.

c) $f(x) = \ln(1+x) + e^x$ $n = 3$

$$DL_0^3 f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 e^1(x) + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 e^2(x)$$

$$= 1 + 2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6} + x^3 e^1(x) + x^3 e^2(x)$$

$$= 1 + 2x + \frac{x^3}{2} + x^3 (e_1(x) + e_2(x))$$

$$= 1 + 2x + \frac{x^3}{2} + x^3 e(x)$$

Equation de tangente en 0 :

$$y = 1 + 2x$$

Position de (C) par rapport à (T) :

$$1 + 2x + \frac{x^3}{2} - (1 + 2x) = \frac{x^3}{2}$$

(C) au dessus de (T) pour tout $x > 0$.

(C) en dessous de (T) pour tout $x < 0$.

d) $f(x) = \sqrt{1+x} \ln(1+x)$

$n = 3$

$$\begin{aligned} DL_0^3 f(x) &= \left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + x^3 e_1(x) \right] \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 e_2(x) \right] \\ &= \left[1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{-\frac{1}{4}(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3 + x^3 e_1(x) \right] \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 e_2(x) \right] \\ &= \left[1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3}{48}x^3 + x^3 e_1(x) \right] \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 e_2(x) \right] \\ &= \left[1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}x^3 + x^3 e_1(x) \right] \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 e_2(x) \right] \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 e_2(x) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{6} + \dots - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \dots + \frac{x^4}{16} + \dots \\ &= x + \frac{8x^3 - 6x^3 - 3x^3}{24} + x^3 e(x) \end{aligned}$$

$$DL_0^3 f(x) = x - \frac{x^3}{24} + x^3 e(x)$$

On tronque \Leftrightarrow on « supprime »
les termes de degré supérieur
à l'ordre n , ici 3

Equation de tangente en 0 :

$$y = x$$

Position de (C) par rapport à (T) :

$$x - \frac{x^3}{24} - (x) = -\frac{x^3}{24}$$

(C) au dessus de (T) pour tout $x < 0$ (car $-\frac{x^3}{24} > 0$ si $x < 0$).

(C) en dessous de (T) pour tout $x > 0$ (car $-\frac{x^3}{24} < 0$ si $x > 0$).

e) $f(x) = e^x \cos x + \frac{x^3}{3} - x - 1$ $n = 4$

$$\begin{aligned} DL_0^4 f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 e_1(x)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 e_2(x)\right) + \frac{x^3}{3} - x - 1 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 e_2(x) + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} + \dots + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{2!2!} + \dots + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^3}{3} - x - 1 \\ &= 1 - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} + x - \cancel{\frac{x^3}{2}} + \cancel{\frac{x^5}{4!}} + \dots + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{x^4}{4}} + \dots + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^4}{24} + \dots + x^4 e_2(x) + \frac{x^3}{3} - x - 1 \\ &= 1 + \frac{x^4}{24} + x - \frac{x^3}{2} + \dots - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^4}{24} + \dots + x^4 e_2(x) + \frac{x^3}{3} - x - 1 \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + x^4 e(x) + \frac{x^3}{3} - x - 1 \end{aligned}$$

// On tronque

Finalement $DL_0^4 f(x) = -\frac{x^4}{6} + x^4 e(x)$

Equation de tangente en 0 : $y = 0$

Position de (C) par rapport à (T) : $-\frac{x^4}{6} - 0 = -\frac{x^4}{6}$

Donc (C) est en dessous de (T) au voisinage de $x = 0$ (car $-\frac{x^4}{6} < 0 \quad \forall x \text{ réel}$)

f) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ $n = 2$

$$f(x) = (1-x) \cdot \frac{1}{1+x}$$

$$DL_0^2 f(x) = (1-x) \left(1 - x + x^2 + x^2 e(x)\right)$$

$$DL_0^2 f(x) = 1 - x + x^2 + x^2 e(x) - x + x^2 - \cancel{x^3} - x^3 e(x)$$

// On tronque

$$DL_0^2 f(x) = 1 - 2x + 2x^2 + x^2(e(x) - x e(x))$$

$$DL_0^2 f(x) = 1 - 2x + 2x^2 + x^2 e'(x) \quad \text{avec } e'(x) = e(x) - x e(x)$$

Equation de tangente en 0 : $y = 1 - 2x$

Position de (C) par rapport à (T) : $1 - 2x + 2x^2 - (1 - 2x) = 2x^2$

Comme $2x^2 > 0$ pour tout x réel, (C) au dessus de (T) pour tout x réel.

TD2 – PROPOSITION DE CORRECTION**Exercice 1 – D'après BTS MAVA 2003**

$$a. \quad DL_0^2 e^{-x} = 1 + \frac{(-x)}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + x^2 e(x)$$

$$\text{Donc } DL_0^2 e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 e(x)$$

$$b. \quad DL_0^2 e^{-x} (2x + 3) = \left[1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 e(x) \right] [2x + 3]$$

$$= 2x + 3 - 2x^2 - 3x + \cancel{\frac{2x^3}{2}} + 3 \frac{x^2}{2} + x^2 e(x) \quad // \quad \text{On tronque}$$

$$= 3 - x - \frac{x^2}{2} + x^2 e(x), \text{ ce qu'il fallait démontrer}$$

Exercice 2 – D'après BTS MAVA 2002

$$a. \quad DL_0^2 e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 e(x)$$

$$b. \quad DL_0^2 f(x) = DL_0^2 e^{-x} (x+1)^2$$

$$= \left[1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 e(x) \right] (x+1)^2$$

$$= \left[1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 e(x) \right] (1 + 2x + x^2)$$

$$= 1 + 2x + x^2 - x - 2x^2 - x^3 + \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{2x^3}{2}} + \dots + x^2 e(x) + \dots \quad // \quad \text{On tronque}$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 e(x), \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

$$c. \quad \text{Equation de la tangente } T \text{ à la courbe } C \text{ au point d'abscisse } 0 : y = 1 + x$$

Position relative de C et T au voisinage de ce point :

$$(C) - (T) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - (1 + x) = -\frac{1}{2}x^2, \text{ et } -\frac{1}{2}x^2 \leq 0 \text{ pour tout } x, \text{ donc :}$$

(C) est en dessous de (T) au voisinage de ce point.

Exercice 3 – D'après BTS MAVA 2000

$$a. \quad DL_0^3 e^{-2x} = 1 + (-2x) + \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3!} + x^3 e(x)$$

$$= 1 - 2x + 2x^2 - \frac{8x^3}{6} + x^3 e(x)$$

$$= 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + x^3 e(x)$$

$$f(x) = \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x}$$

On tronque

$$\begin{aligned} \text{b. } \quad DL_0^3 f(x) &= \frac{4}{3}(1+x) \left[1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + x^3 e(x) \right] \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + x^3 e(x) + x - 2x^2 + 2x^3 + \cancel{\frac{4x^4}{3}} + \dots \right) \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - x - \frac{4x^3}{3} + x^3 e(x) + 2x^3 + \dots \right) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}x^3 + x^3 e(x), \text{ ce qu'il fallait démontrer.} \end{aligned}$$

c. **Equation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 :** $y = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x$
Position relative de C et T au voisinage de ce point :

$$(C) - (T) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}x^3 = \frac{8}{9}x^3, \text{ donc :}$$

(C) est en dessous de (T) pour $x < 0$.

(C) est au dessus de (T) pour $x > 0$.