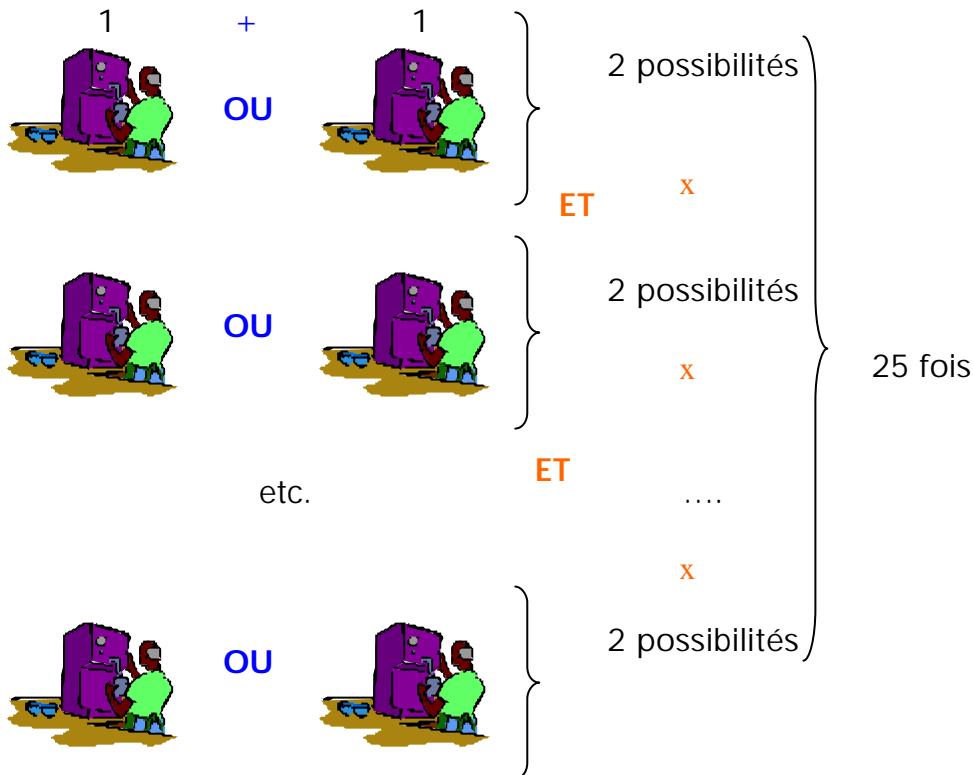


DENOMBREMENT – TD 1 – 2 heures – Proposition de correction

Exercice 1

1. Combien y – a – t – il de séquences distinctes possibles ?

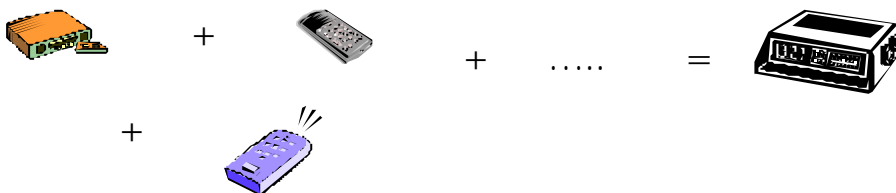


Soit $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^{25}$ possibilités

2. Combien y – a – t – il de cas où dix usagers se sont servis au distributeur de gauche ?

On impose 10 distributeurs parmi 25 soit $C_{25}^{10} = 3\,268\,760$ possibilités

Exercice 2



1. Combien de types de pannes peut – il se produire ?

Nombre de pannes = Nombre de cas possibles – cas où tout fonctionne

Soit $2^{10} - 1 = 1023$ types de pannes

2. Combien peut – il se produire des pannes :

- Contenant 3 modules ?

On « choisit » 3 modules défectueux parmi 10 soit

$$C_{10}^3 = 120 \text{ types de pannes}$$

- Concernant 3 modules dont le module 7 ?

On « choisit » 2 modules défectueux parmi 9 soit

$$C_9^2 = 36 \text{ types de pannes}$$

- Concernant 3 modules sauf les modules 1 et 2 ?

On « choisit » 2 modules défectueux parmi 9 soit

$$C_8^3 = 56 \text{ types de pannes}$$

3. Combien peut – il se produire de pannes différentes sachant qu'il ne peut y avoir plus de 3 modules en panne simultanément ?

1 module en panne OU 2 modules en panne OU 3 modules en panne

$$C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 \text{ soit } 10 + 45 + 120 =$$

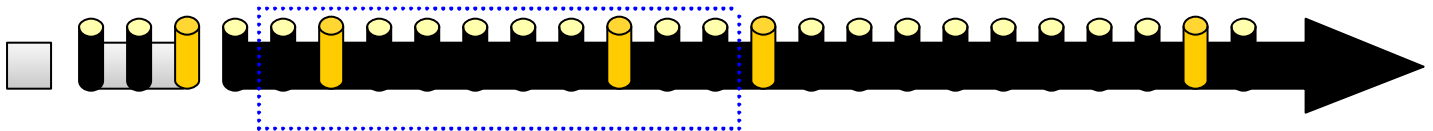
175 types de pannes différentes

4. Pannes différentes si les modules 2 et 3 tombent en panne simultanément ?

On se ramène à la question 1°) avec 9 modules soit $2^9 - 1 =$

511 types de pannes

Exercice 3



1. Combien y – a – il de groupes différents formés de 10 pièces de ce lot ?

On choisit 10 pièces parmi 100 soit

$$C_{100}^{10} \text{ groupes différents}$$

2. a) Aucune pièce défectueuse ?

→ On choisit 10 pièces parmi 95 soit

$$C_{95}^{10} \text{ groupes différents}$$

b) Une pièce défectueuse ?

→ On choisit la pièce parmi 5 ET 9 parmi 95 soit

$$5 C_{95}^9 \text{ groupes différents}$$

3. Combien y en a – t – il contenant plus de 3 pièces défectueuses ?

4 pièces sont défectueuses

ET 6 sont « bonnes »

$$C_5^4 \times C_{95}^6$$

OU

5 pièces sont défectueuses

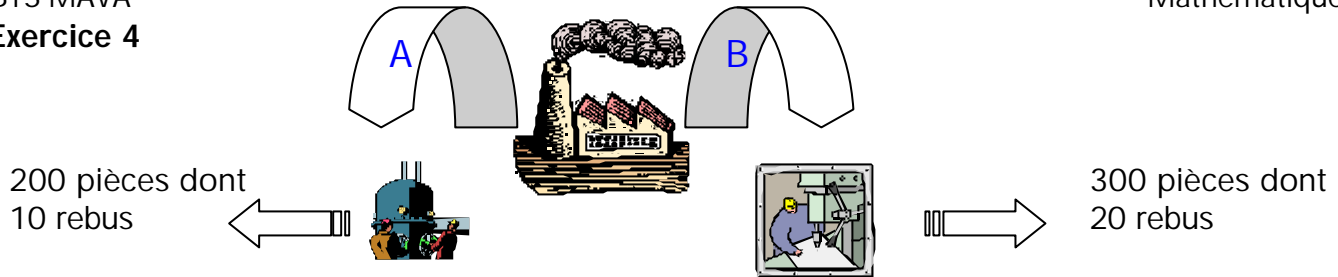
ET 5 sont « bonnes »

$$C_5^5 \times C_{95}^5$$

+

Soit

$$C_5^4 \times C_{95}^6 + C_5^5 \times C_{95}^5$$



On prélève 100 pièces du lot total. On répondra aux questions sous forme de formules.

1. Combien y a – t – il de prélèvements différents possibles (ne comprenant pas exactement les mêmes pièces) ?

On prélève 100 pièces parmi 500 soit

$$C_{500}^{100}$$

2. Combien y en a – t – il ne comprenant que des pièces provenant de A ?

On prélève 100 pièces parmi 200 soit

$$C_{200}^{100}$$

3. Combien y en a – t – il ne comprenant que des pièces non défectueuses ?

On prélève 100 pièces parmi $500 - (10 + 20)$ soit

$$C_{470}^{100}$$

4. Combien y en a – t – il comprenant exactement 5 pièces défectueuses ?

On impose 5 pièces parmi 30 ET 95 pièces parmi 470

$$C_{30}^5 \times C_{470}^{95}$$

5. On considère les nombres N_5 , N_6 , N_7 de prélèvements contenant 5, 6 ou 7 pièces défectueuses. Montrer que N_6 est plus grand que N_5 et que N_7 .

$$N_5 = C_{30}^5 \times C_{470}^{95}$$

$$N_6 = C_{30}^6 \times C_{470}^{94}$$

$$N_7 = C_{30}^7 \times C_{470}^{93}$$

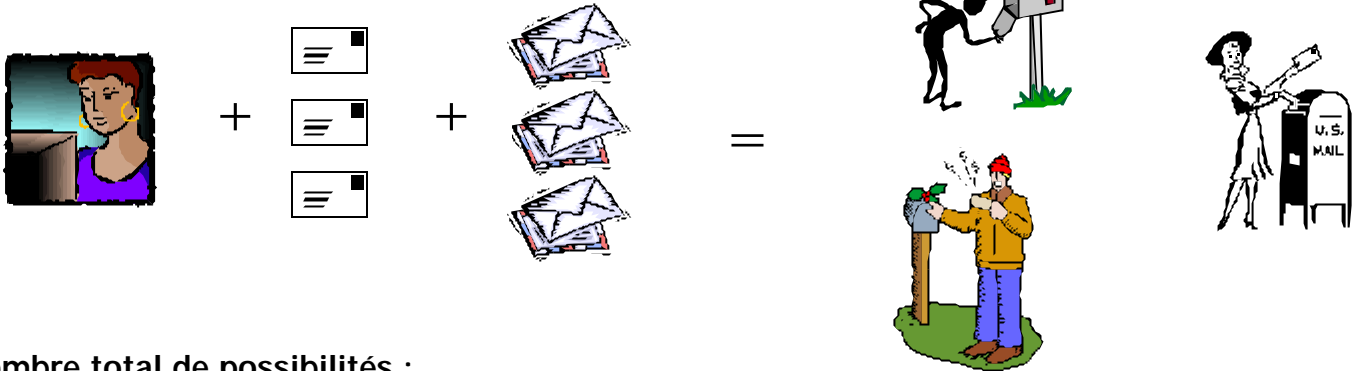
$$\frac{N_6}{N_5} = \frac{\frac{30!}{6!24!} \cdot \frac{470!}{94!376!}}{\frac{30!}{5!25!} \cdot \frac{470!}{95!375!}} = \frac{\cancel{30!} \cancel{470!} 5!25!95!375!}{6!24!94!376! \cancel{30!} \cancel{470!}} = \frac{\cancel{5!}25!\cancel{24!}95.\cancel{94!}37\cancel{5!}}{6.5!\cancel{24!}94!376.37\cancel{5!}} = \frac{2375}{2256} > 1$$

On a donc bien $N_6 > N_5$

$$\frac{N_7}{N_6} = \frac{\frac{30!}{7!23!} \cdot \frac{470!}{93!377!}}{\frac{30!}{6!24!} \cdot \frac{470!}{94!376!}} = \frac{\cancel{30!} \cancel{470!} 6!24!94!376!}{7!23!93!377! \cancel{30!} \cancel{470!}} = \frac{\cancel{6!}24.\cancel{23!}94.\cancel{93!}37\cancel{6!}}{7.6!\cancel{23!}93!377.37\cancel{6!}} = \frac{2256}{2639} < 1$$

On a donc bien $N_7 < N_6$

Une secrétaire colle au hasard 3 étiquettes portant des adresses différentes sur 3 enveloppes. Quelles sont les probabilités des événements suivants ?



Nombre total de possibilités :

Choix de la 1^{ère} adresse **ET** Choix de la 2^{ème} adresse **ET** Choix de la dernière adresse

3 X 2 X 1 soit 6 possibilités

Calcul des probabilités :

$$\text{Probabilité d'un événement} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

- A : chaque destinataire reçoit l'enveloppe qui lui était destinée.

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

- B : un seul destinataire reçoit son courrier.

1 destinataire parmi 3 reçoit son courrier soit 3 cas distincts.

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- C : aucun des destinataires ne reçoit son courrier.

Rq : on a $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ car avec ces trois événements tous les cas possibles sont cités. En effet, le cas où 2 destinataires sur les 3 reçoivent leur courrier est redondant avec le cas A puisque le troisième serait alors « obligé » d'avoir aussi son courrier

$$P(C) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

CALCUL DE PROBABILITES – TD 1 – 2 HEURES – PROPOSITION DE CORRECTION

Exercice 1

À la suite d'une étude statistique on a établi qu'un tireur « au pigeon » avait une probabilité 0,5 d'atteindre la cible à la 1^{ère} cartouche, 0,2 à la 2^{ème} cartouche et 0,3 de la manquer. Les probabilités sont valables pour chaque tir (événements indépendants).

1. On touche à la première **OU** On touche à la deuxième

$$P = 0,5 + 0,2 = \text{soit } P = 0,7$$

2. Quelle est la probabilité sur deux tirs :

- a) de toucher 2 fois la cible (p2) ?

1^{er} tir réussi **ET** 2^{ème} tir réussi

$$P_2 = 0,5 \times 0,2 = \text{soit } P_2 = 0,1$$

- b) de ne la toucher qu'une fois sur deux (p1) ?

OU 1^{er} tir raté **ET** 2^{ème} tir réussi
1^{er} tir réussi **ET** 2^{ème} tir raté

$$P_1 = 0,5 \times 0,3 + 0,2 \times 0,3 = \text{soit } P_1 = 0,21$$

- c) de la manquer deux fois (P₀) ?

1^{er} tir manqué **ET** 2^{ème} tir manqué

$$P_0 = 0,3 \times 0,3 = \text{soit } P_0 = 0,09$$

- d) de toucher deux fois la cible à la 1^{ère} cartouche ?

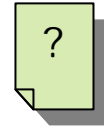
1^{er} tir réussi **ET** 2^{ème} tir réussi
à la 1^{ère} cartouche à la 1^{ère} cartouche

$$P = 0,5 \times 0,5 = \text{soit } P = 0,25$$

3. Quelle est la probabilité de réussir 4 tirs sur 5 ?

4 tirs sont réussis et 1 tir est raté (5 possibilités)

$$P = 5 \times 0,3 \times 0,7^4 = \text{soit } P \approx 0,36$$



1^{er} cas : les 2 documents sont dans la même chemise :

Calcul de p_2

Choix du nombre de chemises vérifiant p_2 : 5
(1 chemise parmi les 12 contient les 2 documents)
Nombre total de chemises : 12

$$\text{Soit } p_2 = \frac{5}{12}$$

Calcul de p_1

Choix du nombre de chemises vérifiant p_1 : 0
(Les 2 documents sont supposés être ensemble)
Nombre total de chemises : 12

$$\text{Soit } p_1 = 0$$

Calcul de p_0

On doit avoir $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ car avec ces 3 configurations tous les cas sont listés.

$$\text{Soit } p_0 = 1 - p_1 - p_2$$

$$\text{Soit } p_0 = \frac{7}{12}$$

2^{ème} cas : chacun des 2 documents a été placé au hasard (peut être dans la même chemise) :

→ On se ramène à un tirage répété deux fois d'un dossier parmi les 12.

Calcul de p_2

- Choix de la 1^{ère} chemise contenant 1 ou 2 dossiers : 5
(1 chemise parmi les 12 contient 1 ou 2 documents)
- Choix de la 2^{ème} chemise contenant 1 ou 0 dossiers : 5

$$\text{Soit } p_2 = \left(\frac{5}{12}\right)^2$$

$$\text{On a donc } p_2 = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12}$$

Calcul de p_1 (1 document est dans les 5 chemises et 1 est dans les 7 autres)

- Choix du document retrouvé : 2
- Probabilité de retrouver 1 document dans les 5
- Probabilité de retrouver 1 document dans les 7

$$\text{Soit } p_1 = 2 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12}$$

Calcul de p_0

1 ou 2 documents sont dans les 7 chemises non prises.

$$\text{Soit } p_0 = \frac{7}{12}$$

1. On prélève une seule pièce ($n=1$). Quelle est la probabilité pour qu'elle soit défectueuse ?

Choix possible pour le prélèvement d'une pièce défectueuse $\rightarrow k$

Nombre de choix possible pour un prélèvement $\rightarrow N$

$$\text{Soit } P = \frac{k}{N}$$

A.N : $P = \frac{3}{20}$ Soit $P = 0,15$

2. On suppose dans la pratique N très supérieur à n et $n - k$. Quelles sont les probabilités :

a) Aucune pièce défectueuse dans le lot (p_0) ?

Dénombrement des cas vérifiant p_0 :

On prélève n pièces parmi $N - k$ $\rightarrow C_{N-k}^n$

Univers des possibles : n pièces parmi N $\rightarrow C_N^n$

$$p_0 = \frac{C_{N-k}^n}{C_N^n}$$

A.N : $p_0 = \frac{C_{17}^5}{C_{20}^5} = \frac{6188}{15504} = \frac{91}{228}$ $p_0 = \frac{91}{228} \approx 0,399$

b) d'avoir une pièce défectueuse (p_1), deux pièces défectueuses (p_2), dans le lot ?

Dénombrement des cas envisagés :

Pour p_1 :

On choisit 1 pièce défectueuse parmi k $\rightarrow C_k^1$

$n - 1$ pièces non défectueuses parmi $N - k$ $\rightarrow C_{N-k}^{n-1}$

Univers des possibles : $\rightarrow C_N^n$

$$p_1 = \frac{C_k^1 C_{N-k}^{n-1}}{C_N^n}$$

A.N : $p_1 = \frac{3 \cdot C_{17}^4}{C_{20}^5} = \frac{3 \cdot 2380}{15504} = \frac{35}{76}$ $p_1 = \frac{35}{76} \approx 0,461$

Pour p_2 :

Avec la même démarche on obtient :

$$p_2 = \frac{C_k^2 C_{N-k}^{n-2}}{C_N^n}$$

A.N : $p_2 = \frac{C_3^2 \cdot C_{17}^3}{C_{20}^5} = \frac{3 \cdot 680}{15504} = \frac{5}{38}$ $p_2 = \frac{5}{38} \approx 0,132$

c) d'avoir q pièces défectueuses (p_q) ?

Avec la même démarche qu'au b) on obtient :

$$P_q = \frac{C_k^q C_{N-k}^{n-q}}{C_N^n}$$

A.N : $q = 1 \rightarrow p_1$ ou $q = 2 \rightarrow p_2$

Rq : si $q = 3 \rightarrow$ Cf question d)

d) d'avoir toutes les pièces défectueuses (P_k) ?

Si on choisit toutes les pièces défectueuses, il reste à choisir $n - k$ pièces parmi les $N - k$ restantes

On a donc

$$P_k = \frac{1 \cdot C_{N-k}^{n-k}}{C_N^n}$$

A.N : $p_3 = \frac{C_{17}^2}{C_{20}^5} = \frac{136}{15504} = \frac{1}{114}$

$$P_3 = \frac{1}{114} \approx 0,009$$