

TD 1 – 2 heures – Applications de cours – Proposition de correction

Exercice 1 – Forme trigonométrique – Notation d'Euler

a) $z = 1 + 1.i$ $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\cos q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $q = \frac{p}{4}$ soit

$$z = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{p}{4}}$$

b) $z = -1 - i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos q = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin q = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $q = -\frac{3p}{4}$ soit

$$z = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{3p}{4}}$$

c) $z = -5i$

$|z| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$

$\cos q = \frac{0}{5} = 0$ $\sin q = \frac{-5}{5} = -1$

donc $q = -\frac{p}{2}$ soit

$$z = 5 \cdot e^{-i\frac{p}{2}}$$

d) $z = -1 - i\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos q = \frac{-1}{2}$ $\sin q = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $q = -\frac{2p}{3}$ soit

$$z = 2 \cdot e^{-i\frac{2p}{3}}$$

e) $z = -\sqrt{3} + i$

$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos q = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin q = \frac{1}{2}$

donc $q = \frac{5p}{6}$ soit

$$z = 2 e^{i\frac{5p}{6}}$$

f) $z = \cos \frac{\tilde{O}}{4} - i \sin \frac{\tilde{O}}{4}$

$z = \cos(-\frac{\tilde{O}}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{\tilde{O}}{4}) = 1 \left(\cos(-\frac{\tilde{O}}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{\tilde{O}}{4}) \right)$

donc $|z| = 1$ et $q = -\frac{\tilde{O}}{4}$ soit

$$z = e^{-i\frac{p}{4}}$$

Exercice 2 – Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique

a) $r = 3$ et $q = \frac{\pi}{6}$

$$z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

soit

$$z = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i$$

b) $r = 2$ et $q = \frac{\pi}{4}$

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

soit

$$z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

c) $r = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{-\pi}{3}$

$$z = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

soit

$$z = \frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{4}$$

d) $r = 1$ et $q = \frac{5\pi}{4}$

$$z = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$$

soit

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

e) $r = 2$ et $q = 2,15$ (valeurs approchées à 10^{-3} près des réels a et b)

$$z = 2 (\cos 2,15 + i \sin 2,15)$$

$$z = 2 \cos 2,15 + 2 i \sin 2,15$$

soit

$$z = -1,095 + 1,674 i$$

Exercice 3 – Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes (Résultats sous forme algébrique)

1°) $(1 + 3i)z + 2 - 4i = 0$

$$(1 + 3i)z + 2 - 4i = 0 \Leftrightarrow (1 + 3i)z = -2 + 4i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2 + 4i}{(1 + 3i)} = \frac{(-2 + 4i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2 + 6i + 4i - 12i^2}{1^2 - (3i)^2} = \frac{-2 + 10i - 12(-1)}{1^2 - 9i^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{10 + 10i}{1 - 9(-1)} = \frac{10 + 10i}{10}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + i$$

soit

$$S = \{ 1 + i \}$$

2°) $z + 1 = (z - 1)(1 + i)$

$$z + 1 = (z - 1)(1 + i) \Leftrightarrow z + 1 = z(1 + i) - (1 + i)$$

$$\Leftrightarrow z(1 - (1 + i)) = -(1 + i) - 1$$

$$\Leftrightarrow z(1 - 1 - i) = -1 - i - 1$$

$$\Leftrightarrow -iz = -2 - i$$

$$\Leftrightarrow i(-iz) = i(-2 - i)$$

$$\Leftrightarrow -i^2 z = -2i - i^2$$

$$\Leftrightarrow -(-1)z = -2i - (-1)$$

$$\Leftrightarrow z = -2i + 1$$

soit

$$S = \{ 1 - 2i \}$$

Exercice 4 – Résoudre dans C les équations suivantes (Résultats sous forme algébrique)

a) $z^2 = 5 + 12i$

Méthode trigonométrique : a t-on $z^2 = r \cdot e^{iq}$

$$r = |5 + 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\cos q = \frac{5}{13} \text{ donc } q \text{ n'est pas un angle « simple » (comme } \frac{p}{3} \text{ ou } \frac{p}{4} \dots)$$

On passe donc à la méthode algébrique.

Méthode algébrique :En posant $z = x + iy$ où x et y sont des réels à déterminer.

$$\begin{aligned} \text{On a } z^2 &= (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + (iy)^2 \\ z^2 &= x^2 + 2xyi + i^2 y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \end{aligned}$$

Comme $z^2 = 5 + 12i$

$$\begin{aligned} \text{On a } \begin{cases} \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(5 + 12i) \\ \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(5 + 12i) \\ |z^2| = |5 + 12i| \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & \textcircled{1} \\ 2xy = 12 & \textcircled{2} \\ (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 13 & \textcircled{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & \textcircled{1} \\ 2xy = 12 & \textcircled{2} \\ x^2 + y^2 = 13 & \textcircled{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Rq : l'équation $\textcircled{3}$ peut paraître inutile puisque $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ suffisent mais $\textcircled{1} + \textcircled{3}$ permet d'éliminer l'inconnue y

$$\begin{aligned} \textcircled{1} + \textcircled{3} : \quad x^2 - y^2 + x^2 + y^2 &= 5 + 13 \\ \Leftrightarrow 2x^2 &= 18 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dans } \textcircled{2} \quad 2xy = 12 &\Leftrightarrow xy = 6 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{6}{x} \\ &\Leftrightarrow x=3 \text{ et } y = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{ou} \quad x = -3 \text{ et } y = \frac{6}{-3} = -2 \end{aligned}$$

Finalement

$S = \{ (3+2i) ; (-3-2i) \}$

b) $z^2 + 2z + 1 - i = 0$

$$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - i)$$

$$\Delta = 4 - 4 + 4i$$

$$\Delta = 4i$$

On cherche d tel que $d^2 = \Delta^2 = 4i$

$$\begin{aligned} \text{Comme } i &= e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ on a } d^2 = 4 e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow d = \pm \sqrt[4]{4e^{i\frac{\pi}{2}}} \\ &\Leftrightarrow d = \pm \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{e^{i\frac{\pi}{2}}} \\ &\Leftrightarrow d = \pm 2(e^{i\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{4}} \\ &\Leftrightarrow d = \pm 2.e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow d = \pm 2.e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } d_1 = 2.(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \quad \text{et} \quad d_2 = -2.(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$\text{Soit } d_1 = 2.(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \text{et} \quad d_2 = -2.(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\text{Soit } d_1 = \sqrt{2} + i \sqrt{2} \quad \text{et} \quad d_2 = -\sqrt{2} - i \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } z_1 &= \frac{-2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2.1} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2.1} \\ z_1 &= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Finalement

$$S = \left\{ \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

$$c) z^2 - (3 + 2i) + 1 + 3i = 0$$

$$\Delta = [-(3 + 2i)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 + 3i)$$

$$\Delta = (3 + 2i)^2 - 4 - 12i$$

$$\Delta = 9 + 12i - 4 - 4 - 12i$$

$$\Delta = 1$$

$$\text{On cherche } d \text{ tel que } d^2 = \Delta^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad d_1 = 1 \quad \text{ou} \quad d_2 = -1$$

$$\text{Soit } z_1 = \frac{-(-(3+2i))+1}{2.1} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(-(3+2i))+1}{2.1}$$

$$\text{Soit } z_1 = \frac{3-2i+1}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3-2i-1}{2}$$

$$\text{Soit } z_1 = \frac{4-2i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2-2i}{2}$$

Finalement

$$S = \{ (2 - i); (1 - i) \}$$

TD 2 – Applications du cours – Proposition de correction

Exercice 1 – Utilisation des formules de Moivre et d'Euler

Rappel sur le développement de $(a \pm b)^n$ à l'aide du Triangle de Pascal

$$(a+b)^n = c_1.a^n + c_2.a^{n-1}.b + c_3.a^{n-2}.b^2 + \dots + c_{n-1}.a.b^{n-1} + c_n.b^n$$

Ex: $(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

Rq : pour $(a-b)^n$ le signe devant c^n « change » une fois sur deux.

n	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	...	
0	1					...	$(a+b)^0 = 1$
1	1	1				...	$(a+b)^1 = 1.a + 1.b$
2	1	2	1			...	$(a+b)^2 = 1.a^2 + 2.a.b + b^2$
3	1	3	3	1		...	$(a+b)^3 = 1.a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$
4	1	4	6	4	1	...	$(a+b)^4 = 1.a^4 + 4.a^3.b + 6.a^2.b^2 + 4.a.b^3 + b^4$
...
n	$(a+b)^n = c_1.a^n + c_2.a^{n-1}.b + \dots + c_{n-1}.a.b^{n-1} + c_n.b^n$

$$1 + 3 = 4$$

$$3 + 3 = 6$$

$$\begin{aligned}
 \cos^3 ? &= \left(\frac{e^{iq} + e^{-iq}}{2} \right)^3 \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right)^3 \cdot [(e^{iq})^3 + 3(e^{iq})^2.(e^{-iq}) + 3.(e^{iq}).(e^{-iq})^2 + (e^{-iq})^3] \\
 &= \frac{1}{8} (e^{3iq} + 3e^{2iq} e^{-iq} + 3.e^{iq} . e^{-2iq} + e^{-3iq}) \\
 &= \frac{1}{8} (e^{3iq} + 3e^{iq} + 3e^{-iq} + e^{-3iq}) \\
 &= \frac{1}{8} [e^{3iq} + e^{-3iq} + 3(e^{iq} + e^{-iq})] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{e^{3iq} + e^{-3iq}}{2} \right) + 3 \left(\frac{e^{iq} + e^{-iq}}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\cos^3 ? = \frac{1}{4} . \cos 3q + \frac{3}{4} \cos q$$

$$\begin{aligned}
 \sin^4 ? &= \left(\frac{e^{iq} - e^{-iq}}{2i} \right)^4 \\
 &= \left(\frac{1}{2i} \right)^4 \cdot [(e^{iq})^4 - 4(e^{iq})^3.(e^{-iq}) + 6.(e^{iq})^2.(e^{-iq})^2 - 4(e^{iq}).(e^{-iq})^3 + (e^{-iq})^4] \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{i} \right)^4 \frac{1}{16} (e^{4iq} - 4e^{3iq} . e^{-iq} + 6e^{2iq} e^{-2iq} - 4.e^{iq} . e^{-3iq} + e^{-4iq}) \\
 &= \frac{1}{16} . 1 (e^{4iq} - 4e^{3iq-iq} + 6e^{2iq-2iq} - 4.e^{iq-3iq} + e^{-4iq}) \\
 &= \frac{1}{16} (e^{4iq} - 4e^{2iq} + 6e^0 - 4.e^{-2iq} + e^{-4iq})
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} [e^{4iq} + e^{-4iq} - 4(e^{2iq} + e^{-2iq}) + 6]$$

$$= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{e^{4iq} + e^{-4iq}}{2} \right) - 4 \left(\frac{e^{2iq} + e^{-2iq}}{2} \right) \right] + \frac{6}{16}$$

Finalement

$$\sin^4 q = \frac{1}{8} \cos 4q - \frac{1}{2} \cos 2q + \frac{3}{8}$$

Exercice 2 – Nombres complexes et géométrie

$$1. \quad Z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z + 1 + i)(\bar{z} - i)$$

$$\Leftrightarrow \quad (z + 1 + i) = 0 \quad \text{ou} \quad (\bar{z} - i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = -1 - i \quad \text{ou} \quad \bar{z} = i \quad \Leftrightarrow \quad z = -i$$

$$S = \{ (-1-i); -i \}$$

$$2. \quad Z = ((x + iy) + 1 + i)((x - iy) - i)$$

$$= (x + iy)(x - iy) - i(x + iy) + x - iy - i + ix - i^2 y - i^2$$

$$= x^2 - i^2 y^2 - ix - i^2 y + x - iy - i + ix - i^2 y - i^2$$

$$= x^2 + y^2 + y + x - iy - i + y + 1$$

$$= x^2 + x + y^2 + 2y + 1 + i(-y - 1)$$

Finalement $Z = X + iY$ avec

$$X = x^2 + x + y^2 + 2y + 1$$

$$Y = -y - 1$$

$$3. \quad Z \text{ est un imaginaire pur} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re}(Z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x + y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (y - (-1))^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Finalement

$$(E) \text{ est le cercle de centre } C \left(-\frac{1}{2}; -1\right) \text{ et de rayon } \frac{1}{2}$$

Rappel : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ est l'équation cartésienne du cercle (C) de centre $A(a; b)$ et de rayon R

Exercice 3 – Nombre complexes et représentation géométrique

1. $|z| = 2 \Leftrightarrow ||\overrightarrow{OM}|| = 2 \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre O et de rayon 2

(E) est le cercle $C(0; 2)$

2. $\arg z = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow M$ appartient à la demi droite d'origine O exclu et de coefficient directeur -1 ($-1 = \tan -\frac{\pi}{4}$).

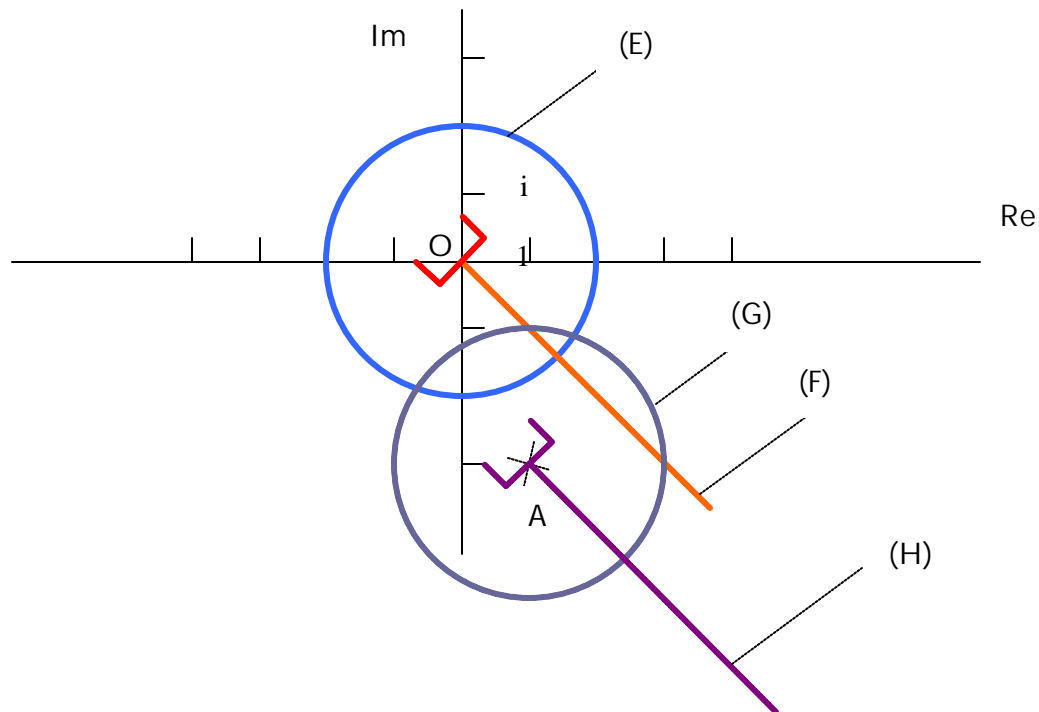
(F) : $y = -x, x > 0$

3. a) $\overrightarrow{AM}(z - (1-3i))$ soit $\overrightarrow{AM}(z - 1 + 3i)$
 b) $|z - 1 + 3i| = 2 \Leftrightarrow ||\overrightarrow{AM}|| = 2$
 $\Leftrightarrow M \in C(A, 2)$

(G) est le cercle de centre $A(1-3i)$ et de rayon 2

- a) $\arg(z - 1 + 3i) = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{4}$
 $\Leftrightarrow M$ appartient à la demi droite d'origine A exclu et de coefficient directeur -1 ($-1 = \tan -\frac{\pi}{4}$).

(H) : $y = -x - 2, x > 1$



TD 3 – A réaliser en autonomie ...
Exercice 1

$$1. \quad 2 - \frac{1}{z-1} = \frac{2(z-1)-1}{z-1} = \frac{2z-2-1}{z-1} = \frac{2z-3}{2z-1} = z'$$

$$2. \quad z \mapsto z_1 = z - 1 \mapsto z_2 = \frac{1}{z_1} \mapsto z_3 = -z_2 \mapsto z_4 = 2 + z_3$$

z_1 : Translation de vecteur $\overrightarrow{u_1}(-1 ; 0)$

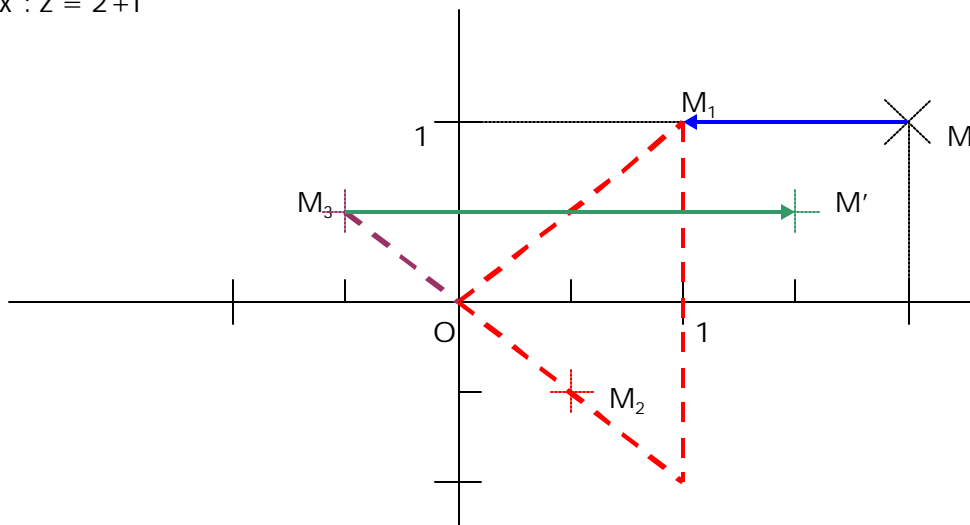
z_2 : Inversion complexe

z_3 : Symétrie par rapport à l'origine

z_4 : Translation de vecteur $\overrightarrow{u_2}(2 ; 0)$

3. Dans un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, tracer le point $M' (z')$, image de $M (z)$

Ex : $z = 2 + i$



On lit $z' = 1,5 + 0,5 i$

$$\text{Par le calcul on obtient } z' = \frac{2(2+i)-3}{2+i-1} = \frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

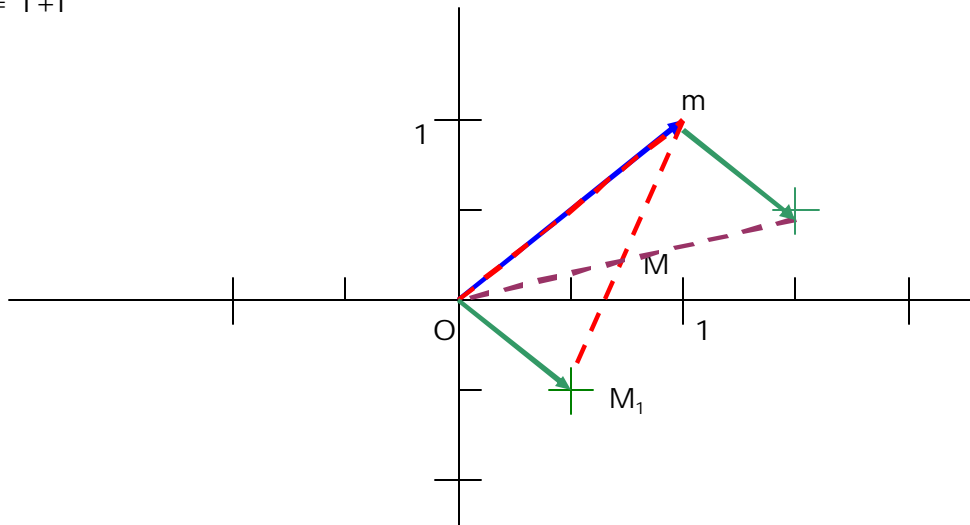
$$\text{Soit } z' = \frac{1-i+2i-2i^2}{1^2-i^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{Soit } z' = 1,5 + 0,5 i$$

Exercice 2

1. On a $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OM_1})$ où M_1 est l'image de M par l'inversion complexe.

Ex : $m = 1+i$



1. On pose $z = r e^{i\mathbf{q}}$ et $Z = X + i Y$, exprimer X et Y en fonction de r et \mathbf{q} .

$$Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$Z = \frac{1}{2} \left(r e^{i\mathbf{q}} + \frac{1}{r} e^{-i\mathbf{q}} \right)$$

$$Z = \frac{1}{2} \left[r (\cos \mathbf{q} + i \sin \mathbf{q}) + \frac{1}{r} (\cos \mathbf{q} - i \sin \mathbf{q}) \right]$$

$$Z = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \mathbf{q} + i \cdot \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \mathbf{q}$$

$$Z = X + i Y$$

On a donc

$$X = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \mathbf{q}$$

$$Y = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \mathbf{q}$$

2. Si m décrit le cercle C de centre O et de rayon R montrer que M décrit l'ellipse

d'équation $\frac{4X^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4Y^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1$. Quel est le transformé de C ?

$$X = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \mathbf{q}$$

$$X^2 = \frac{1}{4} \left(r + \frac{1}{r} \right)^2 \cos^2 \mathbf{q}$$

$$4X^2 = \left(r + \frac{1}{r} \right)^2 \cos^2 \mathbf{q}$$

$$\frac{4X^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} = \cos^2 q$$

On a de même $\frac{4Y^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = \sin^2 q$

Or on a $\cos^2 q + \sin^2 q = 1$ donc

$$\frac{4X^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{4Y^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$$

Equation d'ellipse :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Ici : $a^2 = \frac{r + \frac{1}{r}}{2}$ $b^2 = \frac{r - \frac{1}{r}}{2}$ $x_0 = 0$ $y_0 = 0$

Le transformé de C est une ellipse

3. Avec les résultats de la question 1°) on a :

$$\frac{2X}{\cos q} = r + \frac{1}{r} \quad \text{soit} \quad \frac{4X^2}{\cos^2 q} = \left(r + \frac{1}{r}\right)^2$$

On obtient de même $\frac{4Y^2}{\sin^2 q} = \left(r - \frac{1}{r}\right)^2$

$$\begin{aligned} \frac{4X^2}{\cos^2 q} - \frac{4Y^2}{\sin^2 q} &= \left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \\ &= \left[\left(r + \frac{1}{r}\right) + \left(r - \frac{1}{r}\right)\right] \left[\left(r + \frac{1}{r}\right) - \left(r - \frac{1}{r}\right)\right] \\ &= 2r \cdot \frac{2}{r} \end{aligned}$$

On a $\frac{4X^2}{\cos^2 q} - \frac{4Y^2}{\sin^2 q} = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{\cos^2 q} - \frac{Y^2}{\sin^2 q} = 1$$

Equation d'une hyperbole :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ; \text{ ici } a = \cos q \text{ et } b = \sin q$$

Si $\theta = k$ et $\theta = -k$, les transformés sont confondus car

$$\frac{X^2}{\cos^2 q} - \frac{Y^2}{\sin^2 q} = \frac{X^2}{(\cos(-q))^2} - \frac{Y^2}{(\sin(-q))^2}$$