Chapitre 2

SUITES NUMERIQUES

I] INTRODUCTION AUX SUITES NUMERIQUES :

Définition : Une suite numérique est généralement une fonction de N dans $\mathbb{R}$.

Notation : on utilise habituellement les lettres u, v, w pour désigner une suite et on note u_n l'image de n par u.

$$\mathbf{u :} \quad \begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{n} \mapsto \mathbf{u_n} \end{array}$$

u_n est le **terme de rang n** (ou **d'indice n**)

Exemples :

- La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$:

$u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$ etc. est la suite des nombres entiers naturels impairs.

- La suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$:

  $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{1}{3}$ etc.

Remarques :

Une fonction peut servir en mathématiques à décrire l'évolution d'une grandeur physique de (du type $U = \sqrt{2}\cos 2\pi t$ avec $t \in [0 ; 10]$) t pouvant prendre des valeurs réelles, on parle d'une **situation continue**.

Dans le cas des suites du même type que celles vues plus haut, la variable n ne prend que des valeurs entières, on parle alors de **situations discrètes.**

II] LES SUITES ARITHMETIQUES :

1°) Définitions – Exemples :

Définition d'une suite arithmétique

Une suite arithmétique est une suite numérique dont chaque terme s'obtient en **ajoutant** au précédent un nombre réel r constant appelé **raison**. Pour tout nombre entier naturel n on a $\mathbf{u_{n+1} = u_n + r}$

Exemples :

La suite des nombres entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$

La suite des nombres entiers naturels est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 0$.

Pour démontrer qu'une suite est une suite arithmétique, il suffit de vérifier que $u_{n+1} - u_n$ est constant. Cette constante est la raison r.

2°) Expression du terme u_n en fonction de n :

On se propose d'établir un résultat permettant d'obtenir directement le terme u_n d'une suite arithmétique sans calculer les termes précédents.
Prenons une suite arithmétique u_n de raison r :

$$u_1 = u_0 + r$$
$$u_2 = u_1 + r$$
$$u_3 = u_2 + r$$
$$\vdots$$
$$u_n = u_{n-1} + r$$

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) + u_n = u_0 + (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) + n r$$

Donc $\mathbf{u_n = u_0 + n r}$

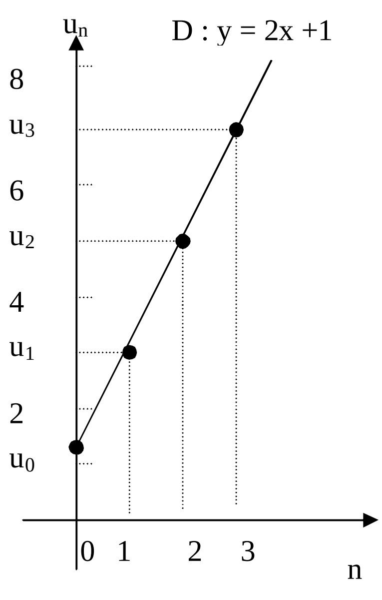
Théorème : Pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r :

$$\mathbf{u_n = u_0 + n r}$$

Pour une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r :

$$\mathbf{u_n = u_1 + (n - 1) r} \textbf{ avec n dans } \mathbb{N}^*$$

3°) Représentation graphique :



La suite des entiers naturels impairs est définie sur N par :
$u_n = 2n+1$

Plaçons dans un repère orthonormé (O ; i ; j) la succession des points d'abscisse n et d'ordonnée u_n.

C'est la représentation graphique de la suite arithmétique :
$n \mapsto u_n = 2n+1$.

Elle est constituée par l'ensemble des points de la droite
y = 2 x +1 dont l'abscisse est un entier naturel.

La représentation graphique d'une suite arithmétique est constituée de points alignés.
On passe de l'un à l'autre en ajoutant 1 à l'abscisse et la raison r à l'ordonnée.

4°) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Exemple de la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

Posons $\quad An = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$

On a $\quad An = n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$

Addition terme à terme

$$2\ An = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ termes}}$$

Donc $2\ An = n\ (n+1)$

Donc $\quad An = \dfrac{n\ (n+1)}{2}$

> **Théorème :** La somme des n premiers entiers naturels non nuls est :
> $$\mathbf{1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \dfrac{n\ (n+1)}{2}}$$

Somme de n+1 termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Soit u_n = une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Pour calculer $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, on exprime chaque terme en fonction de u_0 et r puis on fait la somme membre à membre.

$$\begin{array}{lcl}
u_0 & = & u_0 \\
u_1 & = & u_0 + r \\
u_2 & = & u_0 + 2\ r \\
u_3 & = & u_0 + 3\ r \\
\vdots & & \vdots \\
u_n & = & u_0 + n\ r \\
\hline
Sn & = & (n+1)\ u_0 + \underbrace{(1 + 2 + \ldots + n)}_{\frac{n\ (n+1)}{2}}\ r
\end{array}$$

$Sn \quad = (n+1)\ u_0 + \dfrac{n(n-}{2}$

$Sn \quad = (n+1)[\ u_0 + \dfrac{n.r}{2}\ ]$

$Sn \quad = (n+1)[\ \dfrac{2}{2} u_0 + \dfrac{n.r}{2}\ ]$

$Sn \quad = (n+1)(\dfrac{u_0 + u_0 + n.r}{2})$

$Sn \quad = (n+1)(\dfrac{u_0 + u_n}{2})$

Théorème : Pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r :

$$\mathbf{u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n + 1)\left(\frac{u0 + un}{2}\right)}$$

Pour une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r :

$$\mathbf{u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n\left(\frac{u1 + un}{2}\right)}$$

$$\textbf{Sn = nombre de termes x } \frac{\textbf{(premier terme + dernier terme)}}{\textbf{2}}$$

III] LES SUITES GEOMETRIQUES :

1°) Définition - Exemples :

Définition d'une suite géométrique
Une suite géométrique est une suite numérique dont chaque terme s'obtient en **multipliant** le précédent par une constante q (q ¹ 0) appelée **raison**. Pour tout nombre entier naturel n on a : $\mathbf{u_{n+1} = q \cdot u_n}$

Exemple :

- La suite de terme général un = 2^n est une suite géométrique puisque pour tout n dans N on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2.$$ La raison est q = 2.

Pour démontrer qu'une suite est une suite géométrique, il suffit de vérifier que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante est la raison q.
Une suite géométrique est définie par son premier terme et sa raison q

2°) Expression du terme u_n en fonction de n :

On se propose d'établir un résultat permettant d'obtenir directement le terme u_n d'une suite géométrique sans calculer les termes précédents
Prenons une suite géométrique u_n de raison q :

$$u_1 = u_0 \; q$$
$$u_2 = u_1 \; q$$
$$u_3 = u_2 \; q$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$u_n = u_{n-1} \; q$$

$$(u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1}) \; u_n = u_0 \; (u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1}) \; q^n$$

Donc $\mathbf{u_n = u_0 \; q^n}$

Théorème :

Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q :

$$\mathbf{u_n = u_0\ q^{\,n}}$$ **pour tout n dans N**

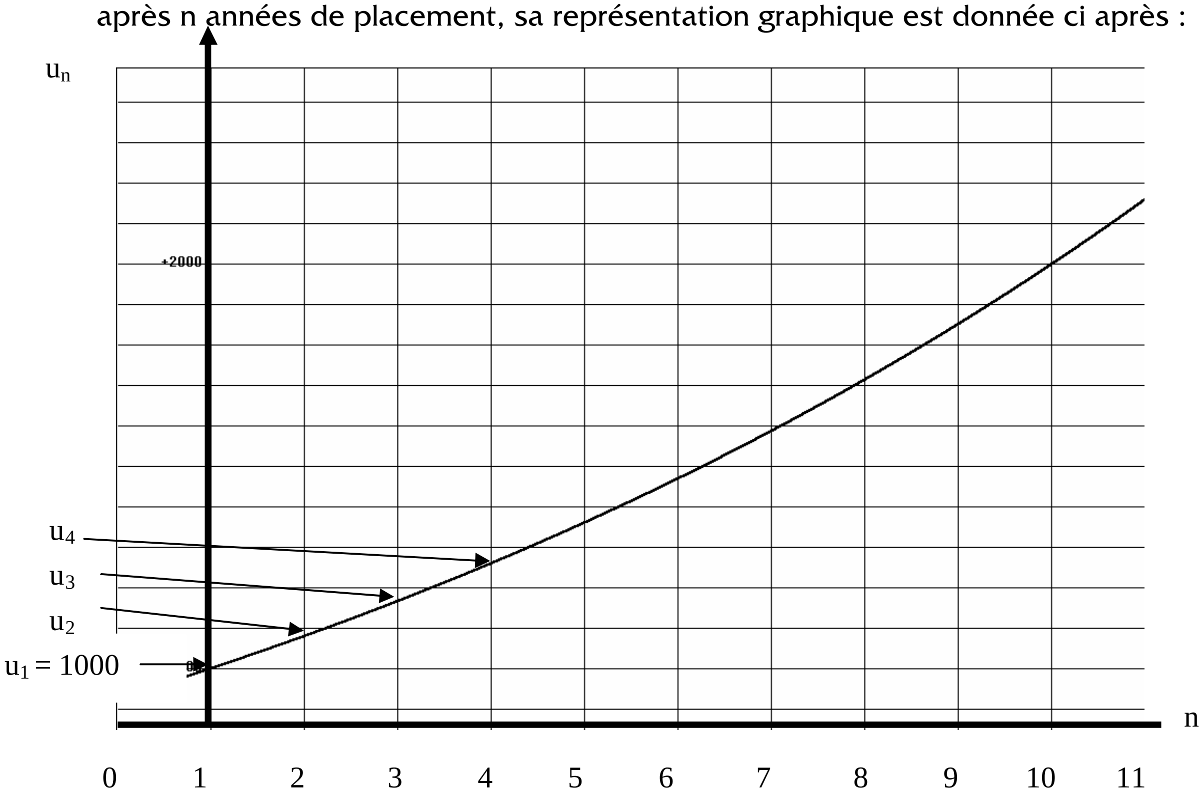
Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q :

$$\mathbf{u_n = u_1\ q^{\,n-1}}$$ **pour tout n dans N ***

On peut retenir u_n = (premier terme) x (raison) $^{\text{nombre de termes avant Un}}$

<u>3°) Exemples de représentations graphiques :</u>

Pour notre exemple du <u>I]</u> où est la suite géométrique correspondant au capital après n années de placement, sa représentation graphique est donnée ci après :



La représentation graphique d'une suite géométrique est constituée de points situés sur une courbe.

On passe de l'un à l'autre en ajoutant 1 à l'abscisse et en multipliant l'ordonnée par la raison r.

4°) Somme de termes consécutifs d'une suite géométriques :

Exemple : somme des (n+1) premières puissances d'un nombre réel q ($q \neq 0$)

Posons $B_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$

$- q B_n = - q - q^2 - \ldots - q^n - q^{n+1}$ Addition terme à terme

$B_n - q B_n = 1 - q^{n+1}$

Donc $B_n (1 - q) = 1 - q^{n+1}$

Finalement $B_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$

Théorème :

$$\textbf{Si } q \neq 1, \quad 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple :

$1 + 2 + 2^2 \ldots + 2^9 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Somme de n+1 termes consécutifs d'une suite géométrique.

Soit u_n = une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

Pour calculer $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, on exprime chaque terme en fonction de u_0 et q.

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$S_n = u_0 + q u_0 + \ldots + q^n u_0$

$S_n = u_0 (1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$

Finalement $S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$

Théorème : pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$,

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On peut retenir :

$$S_n = (\text{premier terme}) \times \frac{(1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}})}{1 - \text{raison}}$$

IV] SUITES CROISSANTES, DECROISSANTES, MONOTONES :

1°) Suites croissantes :

- Une suite numérique (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est **(strictement)croissante** si la fonction f(x) est (strictement) croissante.

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang n_0 si et seulement si, pour tout entier $n \geq n_0$ on a $\mathbf{u_{n+1} \geq u_n}$.

- Une suite (u_n) est **strictement croissante** à partir du rang n_0 si et seulement si, pour tout entier $n \geq n_0$ on a $\mathbf{u_{n+1} > u_n}$.

Une suite arithmétique est strictement croissante si sa raison est strictement positive.

Une suite géométrique est strictement croissante si :
- sa raison est supérieure à 1 et son premier terme est positif.
- sa raison est strictement comprise entre 0 et 1 et son premier terme est négatif.

2°) Suites décroissantes :

- Une suite numérique (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est (**strictement) décroissante** si la fonction f(x) est (strictement) décroissante.

- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang n_0 si et seulement si, pour tout entier $n \geq n_0$ on a $\mathbf{u_{n+1} \leq u_n}$.

- Une suite (u_n) est **strictement décroissante** à partir du rang n_0 si et seulement si, pour tout entier $n \geq n_0$ on a $\mathbf{u_{n+1} < u_n}$.

Une suite arithmétique est strictement décroissante si sa raison est strictement négative.

Une suite géométrique est strictement décroissante si :
- sa raison est strictement comprise entre 0 et 1 et son premier terme est positif.
- sa raison est supérieure à 1 et son premier terme est négatif.

3°) Suites monotones :

Une suite monotone est une suite soit croissante, soit décroissante.

V] ENONCES USUELS SUR LES SUITES :

1°) Opérations sur les suites convergentes:

On dit d'une suite (u_n) qui tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$ qu'elle converge vers l.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent vers l et l'. On admettra les propriétés suivantes :

- La suite $(u_n) + (v_n)$ converge vers l + l'.
- La suite $(u_n v_n)$ converge vers l l'.
- Si l' $\neq 0$, la suite $(\frac{1}{v_n})$ converge vers $\frac{1}{l'}$ et la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $(\frac{l}{l'})$

2°) Propriétés :

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l. Si à partir d'un certain rang : $v_n \leq u_n \leq w_n$) alors u_n converge vers la limite l.

Toute suite de nombres réels croissante et majorée (ou décroissante et minorée) est convergente.

VI] CROISSANCES COMPAREES DES SUITES : (a^n), (n^a), $(\ln n)$

1°) Limite de ces suites :

On démontre et on admet les résultats suivants :

- Si a > 1, la suite (a^n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$
- Si 0 < a < 1, la suite (a^n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$
- Si $a > 0$, la suite (n^a) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^a = +\infty$
- Si $a < 0$, la suite (n^a) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^a = 0$
- La suite (ln n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln n) = 0$

2°) Croissance comparée des suites : (a^n), (n^a), $(\ln n)$ avec a > 1 et $a > 0$

On démontre et on admettra les résultats suivants :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n^a} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n^a}{\ln n} = +\infty$$

3°) Suite négligeable devant une autre, suites équivalentes :

- On dit que la suite (un) est négligeable devant la suite (vn) si $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- On dit que la suite (un) est équivalent à la suite (vn) si $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

  On écrit $(u_n) \sim (v_n)$

TD 1 – APPLICATION DU COURS

Pour les exercices de 1 à 5, (u_n) désigne une suite arithmétique avec comme premier terme u_0, de raison r et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Exercice 1

On donne $u_0 = -1$ et $r = \frac{1}{4}$; Calculer u_{12} et S_{12}.

Exercice 2

On donne $u_3 = 2$ et $r = -3$; Calculer u_0 et S_3.

Exercice 3

On donne $u_2 = 10$ et $u_4 = 30$; Calculer u_0 et r.

Pour les exercices de 4 à 6, (u_n) désigne une suite géométrique avec comme premier terme u_0, de raison q et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Exercice 4

On donne $u_1 = 2$ et $q = -5$; Calculer u_0 et u_5.

Exercice 5

On donne $u_4 = 24$ et $q = \frac{1}{2}$; Calculer u_0.

Exercice 6

On donne $u_1 = 196$ et $u_3 = 49$; Calculer q et u_0.

Exercice 7

On considère une suite (u_n) définie pour tout entier n par la relation suivante :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1} + u_n} = 2$$

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison.
2. Exprimer en fonction de u_0 et de n la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$
3. Que peut - on dire sur la monotonie de cette suite ? Justifier.

Exercice 7

Soit la suite numérique définie par $u_n = \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ pour n entier naturel.

1. Calculer u_0, u_1, u_2.
2. Etudiez la monotonie de u_n .
3. En déduire à partir de quel rang u_n est monotone.
4. Conclure quant à la convergence de u_n.

TD 2 – APPLICATION DIVERSES

Exercice 1

On souhaite amortir une machine achetée 20 000 € avec des annuités qui soient des termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 4 500 € et de raison 450 €. Calculer le nombre d'années nécessaires pour amortir cette machine.

Exercice 2

Dans un jeu télévisé, en cas de succès, un concurrent peut quitter l'émission en emportant son gain ou, la semaine suivante, remettre en jeu cette somme qui doublera alors en cas de succès et ainsi de suite de semaine en semaine. Mais en cas d'échec, il perd tout.
La première semaine le gain est de 250 €. On étudie le cas où un joueur gagne et remet en jeu son gain n semaines consécutives.

On appelle f (n) le gain obtenu au $n^{\text{ième}}$ succès consécutif, par exemple :
f (1) = 250, f (2) =500 etc.

1. Montrer que les gains sont les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
2. Calculer f (n) en fonction de n.
3. Combien le candidat emporte – t – il s'il arrête au bout de 5 semaines consécutives de gain ?

Exercice 3

Monsieur DUPONT désire acheter une automobile qui coûte au 1er juillet 2004 15 000 €. N'ayant à sa disposition que 12 000 €, et ne voulant pas prendre de crédit, il décide de placer ses 12 000 € à un taux annuel de 7 %. On se propose de calculer en quelle année Monsieur DUPONT pourra acheter la voiture dont il rêve. Pour tout entier n, on note un le capital dont il dispose au 1er juillet de l'année 2004+n.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. Exprimer u_n en fonction de n
3. On admet que le prix de l'automobile que veut acheter Monsieur DUPONT augmente régulièrement de 3% au 1er juillet de chaque année. Pour tout entier n, on note v_n le prix de l'automobile au 1er juillet de l'année 2004+n.
4. Calculer à partir de quelle année, Monsieur DUPONT pourra effectivement s'offrir son véhicule.

TD1

Exercice 1

$u_{12} = 2$; $S_{12} = \frac{13}{2}$

Exercice 2

$u_0 = 11$; $S_3 = 26$

Exercice 3

$u_0 = -10$; $r = 10$

Exercice 4

$u_0 = -\frac{2}{5}$; $u_5 = 1250$

Exercice 5

$u_0 = 384$

Exercice 6

$u_0 = 392$ et $q = \frac{1}{2}$ ou $u_0 = -392$ et $q = -\frac{1}{2}$

Exercice 7

1. On trouve $u_{n+1} = -3\,u_n$ donc $q = -3$
2. $Sn = \frac{u_0}{4}(1-(-3)^{n+1})$
3. Elle n'est pas monotone car $q < 0$.

Exercice 8

1. $u_0=1$; $u_1 = \frac{3}{4}$; $u_2 = \frac{5}{9}$
2. En utilisant $f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$ on a $f'(x) = \frac{-x(2x+1)}{(x+1)^4}$ donc (u_n) strictement décroissante
3. A partir du rang 0.
4. En remarquant que pour tout n entier naturel, $(u_n) > 0$, comme (u_n) est strictement décroissante elle est convergente.

TD2

Exercice 1

9 ans

Exercice 2

1. $f(n+1) = 2\,f(n)$. C'est donc bien une suite géométrique de premier terme $f_1=250$ et de raison $q = 2$
2. $f_n = 250 \cdot 2^{n-1}$
3. 4 000 €

Exercice 3

1. $u_1 = 12\,840$ $u_2 = 13\,738{,}80$
2. $(u_n) = 12\,000 \cdot 1{,}07^n$
3. $(v_n) = 15\,000 \cdot 1{,}03^n$
4. Pour $(u_n) = (v_n)$ on trouve $n \geq 6$ soit en 2010.