Chapitre 5

MAJORATIONS TAYLORIENNES – DEVELOPPEMENTS LIMITES

I] INEGALITE DE TAYLOR:

A partir de l'inégalité des accroissements finis :

> Pour une fonction f dont la dérivée est continue sur un intervalle I, s'il existe un réel M tel que pour tout x de I, $|f'(x)| \leq M$, alors quels que soient les réels a et b de I, on a :
>
> $$| f(b) - f(a) | \leq M (b - a)$$

On va généraliser cette étude dans le cas où la fonction f possède (n+1) dérivées continues sur I.

1°) Premier cas : n = 1 – Fonction à dérivée seconde continue et bornée :

On démontre et on admet le résultat suivant :

> Soit une fonction f admettant une dérivée seconde continue sur un intervalle I, s'il existe un réel positif M tel que pour tout x de I, $|f''(x)| \leq M$, alors quels que soient les réels a et b de I, on a :
>
> $$| f(b) - f(a) - (b - a) f'(a) | \leq M \frac{(b-a)^2}{2}$$

2°) Généralisation : Fonction à dérivée d'ordre n+1 bornée :

On démontre et on admet le résultat suivant :

> Soit une fonction f admettant sur un intervalle I des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre n+1
> S'il existe un réel positif M tel que pour tout x de I, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, alors quels que soient les réels a et b de I, on a :
>
> $$|f(b) - f(a) - (b - a) f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) \dots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) | \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

n ! se lit factorielle n et n ! = n (n-1) (n-2) … 2! 1! 0! avec 0! = 1.

II] FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTEGRAL:

1°) Etude d'un cas particulier :

Soit une fonction f admettant sur un intervalle I des dérivées continues jusqu'à l'ordre 3 e t a et b deux réels de I.

On a : $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$

Avec la formule d'intégration par parties

On pose $\begin{cases} u(t) = f'(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ on obtient $\begin{cases} u'(t) = f''(t) \\ v(t) = t - b \end{cases}$

On a $\int_a^b f'(t)\,dt = [\,(t-b)\,f'(t)\,dt\,]_a^b - \int_a^b (t-b)\,f''(t)\,dt$

D'où la relation : $f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(a) - \int_a^b (t-b)\,f''(t)\,dt$

Soit $$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)\,f'(a) + \int_a^b (b-t)\,f''(t)\,dt}$$

Cette relation est appelée Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1.

2°) Généralisation :

On démontre et on admettra le théorème suivant :

Soit f une fonction admettant sur un intervalle I des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre n+1, alors quels que soient les réels a et b de I, on a la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n :

$$f(b) = f(a) + (b-a)\,f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}_{\textbf{Reste intégral}}$$

III] DEVELOPPEMENTS LIMITES :

1°) Etude d'un exemple :

Soit la fonction $f(x) = e^x$, on sait que $f^{(3)}(x) = e^x$.

Soit I = [-1 ;1], on a pour tout x de I, $0 < f^{(3)}(x) \leq e$, la dérivée d'ordre 3 étant bornée, appliquons l'inégalité de Taylor dans le cas où a = 0, b = x et n=2.

On obtient : $\left| f(x) - f(0) - x f'(0) - \frac{x^2}{2} f''(0) \right| \leq e \left| \frac{x^3}{6} \right|$

Soit $\left| e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right| \leq e \left| \frac{x^3}{6} \right|$

Pour $x \neq 0$, on a : $0 \leq \frac{1}{x^2} \left| e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{e}{6} |x|$

Si x → vers 0, $\frac{e}{6}|x| \to 0$ donc $\frac{1}{x^2} \left| e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right| \to 0$, on peut donc écrire :

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = x^2 e(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} e(x)$$

C'est à dire $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 e(x)$ avec $\lim_{x \to 0} e(x)$

Cette écriture est appelée **développement limité** de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.

2°) Généralisation :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant zéro et n un entier naturel non nul. On dit que la fonction f admet au point zéro ou au voisinage de zéro un développement limité d'ordre n, s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout réel x de I :

$$\boxed{f(x) = P(x) + x^n e(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n e(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} e(x)}$$

La partie polynomiale $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ est la **partie régulière** du développement limité ; le terme $x^n e(x)$ est le **terme complémentaire**.

Rq : on admet le résultat en un point a :

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n e(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} e(x)$

En pratique les développements limités (DL) usuels sont établis au point 0 ; pour établir un DL de f au point a, on détermine le DL de la fonction g(x)= f(a+x).

3°) DL des fonctions usuelles :

Le tableau suivant donne les DL des fonctions usuelles au voisinage de 0.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n e(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n e(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n e(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1} e(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p} e(x)$$

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!} x + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} x^n + x^n e(x)$$

a est un réel donné

Dans tous les cas ci-dessus on a $\lim_{x \to 0} e(x) = 0$

4°) Propriétés algébriques :

On admettra les propriétés suivantes :

Si les fonctions f et g admettent à l'ordre n au point zéro des DL dont les parties régulières sont P et Q alors :

- La fonction f + g admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est P+Q.
- La fonction f . g admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est le polynôme déduit de P . Q en supprimant (tronquant) les termes de degré strictement supérieur à n

TD 1 – APPLICATION DU COURS

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes :

1. Donner le DL au voisinage de zéro à l'ordre n.

2. En déduire une équation de la tangente en son point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de la courbe et de la tangente.

a) $f(x) = e^{x} - 2\sqrt{1+x}$ $\quad n = 2$

b) $f(x) = \sqrt{1-x}$ $\quad n = 2$

c) $f(x) = \ln(1+x) + e^{x}$ $\quad n = 3$

d) $f(x) = \sqrt{1+x}\,\ln(1+x)$ $\quad n = 3$

e) $f(x) = e^{x}\cos x + \dfrac{x^{3}}{3} - x - 1$ $\quad n = 4$

f) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ $\quad n = 2$

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions définies sur R par $f(x) = e^{x}$ et $g(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

On note (C) et (P) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé.

1. Montrer qu'au point A (0 ;1) les courbes (C) et (P) ont même tangente dont on donnera l'équation.

2. Ecrire le développement limité de f (x) – g (x) à l'ordre 3 au voisinage de zéro. En déduire la position relative des courbes (C) et (P) au voisinage du point A.

TD 2 – DU COTE DE L'EXAMEN …

Exercice 1 – D'après BTS MAVA 2003

D'après EXERCICE 2, partie B : $f(x) = (2x+3)\,e^{-x}$

3°)

a. Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

b. Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\,e(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} e(x) = 0$$

Exercice 2 – D'après BTS MAVA 2002

D'après EXERCICE 2, partie B : $f(x) = (x+1)^2\,e^{-x}$

3°)

a. A l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^{t}$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

b. Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f est $1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\,e(x)$

c. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point .

Exercice 3 – D'après BTS MAVA 2000

D'après EXERCICE 2, partie B : $f(x) = \frac{4}{3}(1+x)\,e^{-2x}$

3°)

a. A l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^{t}$, donner le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-2x}$.

b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction f est $\frac{4}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}x^3 x^2 + x^3\,e(x)$ avec $\lim_{x\to 0} e(x) = 0$

c. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T, pour x positif au voisinage de 0.

TD 3 – A REALISER EN AUTONOMIE ...

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur] $-\frac{?}{2}$; $+\frac{?}{2}$ [par f (x) = $e^{-x}\cos x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Ecrire le DL $_0^3$ f (x). En déduire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse 0 ainsi que leur position relative au voisinage de ce point.
3. Construire (C) et (T).
4. Calculer $\int_{-\frac{\Pi}{2}}^{\frac{\Pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx$ (On pourra utiliser deux intégrations par parties successives.)
5. En déduire une valeur approchée au mm² près de l'aire de la surface délimitée par la courbe (C) et l'axe des abscisses.

Exercice 2

1. En utilisant le DL de $(1+x)^a$, déterminer le DL$_0^3$ de la fonction f (x) = $\sqrt{1+x}$.
   Donner le DL$_0^3$ de la fonction g(x) = $\sqrt{1-x}$
2. Déterminer le DL$_0^3$ de h(x)= $e^x+2\sqrt{1-x}-\frac{x^2}{4}$. Utiliser ce DL pour donner l'allure de la courbe représentative de h(x) au voisinage de 0.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur] -1; +∞[par f (x) = $\frac{\ln(x+1)}{x+2}$ On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

1. Déterminer f ' (x).
2. Etudier les variations de la fonction g définie sur] -1; +∞[par :
   $$g(x) = \frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1)$$
   Donner son tableau de variation (on ne construira pas sa courbe) et montrer que g s'annule pour une seule valeur a ($a > 0$) et que l'on a :
   $$2{,}5 < a < 2{,}6.$$
   En déduire sur cet intervalle le signe de g(x) puis celui de f ' (x).
3. Déterminer les limites de f en –1 et en - ∞. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
4. Etablir le tableau de variation de f.
5. Déterminer un DL à l'ordre 2 de f au voisinage de 0. En déduire la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente en 0 au voisinage de ce point.
6. Tracer la courbe (C).

RESULTATS – ELEMENTS DE REPONSE DES TD

TD 1

Exercice 1

	DL	Tangente	Position
a)	DL_0^2 f(x) = $-1+\dfrac{3x^2}{4}+x^2 e(x)$	y = -1	(C) au dessus de (T) pour tout x réel
b)	DL_0^2 f(x) = $1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{x^2}{8}+x^2 e(x)$	$y = 1-\dfrac{1}{2}x$	(C) en dessous de (T) pour tout x réel
c)	DL_0^3 f(x) = $1+2x+\dfrac{x^3}{2}+x^3 e(x)$	y = 1+2 x	(C) au dessus de (T) pour tout x > 0 (C) en dessous de (T) pour tout x < 0
d)	DL_0^3 f(x) = $x-\dfrac{x^3}{24}+x^3 e(x)$	y = x	(C) au dessus de (T) pour tout x <0 (C) en dessous de (T) pour tout x >0
e)	DL_0^4 f(x) = $-\dfrac{x^4}{6}+x^4 e(x)$	y = 0	(C) en dessous de (T)
f)	DL_0^2 f(x) = $1-2x+2x^2+x^2 e'(x)$	y = 1- 2x	(C) au dessus de (T) pour tout x réel

Exercice 2

1°) DL_0^1 f(x) = $1+x+x e1(x)$ $(T_f) : y = 1 + x$

DL_0^1 g(x) = $1+x+x e2(x)$ $(T_g) : y = 1 + x$

2°) DL_0^3 (f(x) – g (x)) = $\dfrac{x^3}{3!}$

TD 2

Exercice 1

a. $1-x+\dfrac{x^2}{2}+x^2 e(x)$

b. /

Exercice 2

a. $1-x+\dfrac{x^2}{2}+x^2 e(x)$

b. /

c. (T) : y = 1 + x et C en dessous de T au voisinage de 0.

Exercice 3

a. $1-2x+2x^2-\dfrac{4}{3}x^3+x^3 e(x)$

b. /

c. (T) : $y = \dfrac{4}{3}-\dfrac{4}{3}x$ C en dessous de T si x<0, au dessus pour x >0.

Exercice 1

1. $f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$

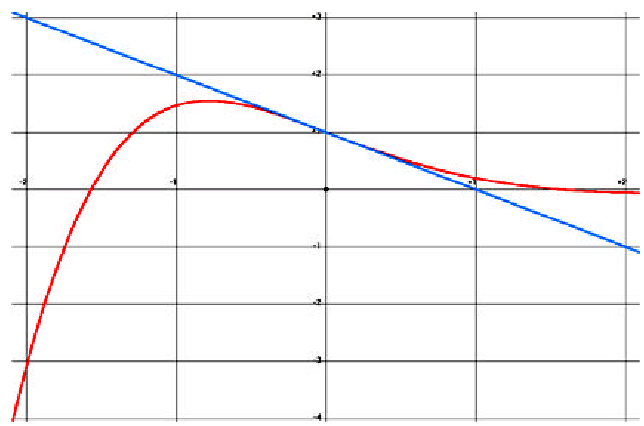
   On déduit alors le tableau de variation suivant :

x	$-\frac{?}{2}$		$-\frac{?}{4}$		$\frac{?}{2}$
$-e^{-x}$		$-$		$-$	
$\cos x + \sin x$		$-$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{p}{4}}$	$\searrow$	0

2. $DL_0^3\ f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3 e(x)$

   $(T) : y = 1 - x$; (C) au dessus de (T)

3. Construire (C) et (T).



4. $\int_{-\frac{\Pi}{2}}^{\frac{\Pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx = \frac{e^{-\frac{p}{2}} - e^{\frac{p}{2}}}{2}$ Rq : $I = \text{sh}\,\frac{p}{2}$

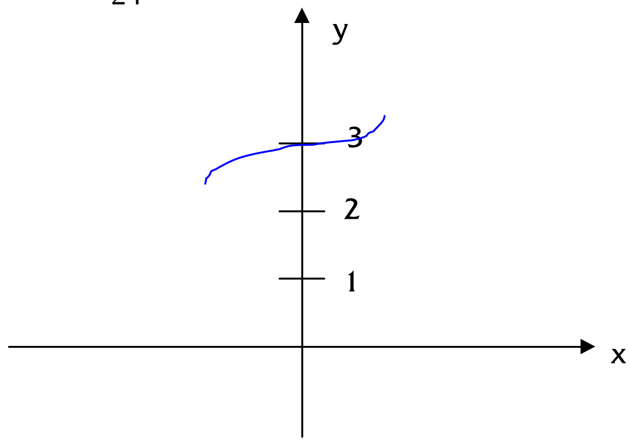
5. $A = \text{sh}\,\frac{p}{2}$

Exercice 2

1. $DL_0^3\ f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3 e_f(x)$

   $DL_0^3\ g(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + x^3 e_g(x)$

2. $DL_0^3\ h(x) = 3 + \frac{x^3}{24} + x^3\, e(x)$



Exercice 3

1. $$f'(x) == \frac{\frac{x+2}{x+1} - \ln(x+1)}{(x+2)^2}$$

2. $$g'(x) = -\frac{x+2}{(x+1)^2}$$

x	-1		+∞
x+2		+	
$\frac{1}{(x+1)^2}$	‖	+	
$-\frac{x+2}{(x+1)^2}$	‖	−	
g(x)	‖ + ∞	↘	- ∞

g s'annule pour une seule valeur a . g(2,5) >0 et g(2,6) < 0 donc 2,5 < a <2,6.

1. En 1^+ f(x) → − ∞
   En +∞ f(x) →0 −

2.

x	-1		α		+∞
g(x)		+		−	
$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+2)^2}$		+		−	
f(x)	- ∞	↗	~0,28	↘	0

3. DL_0^2 f(x) = $\frac{1}{2}$ x - $\frac{x^2}{2}$ $+x^2 e(x)$

4. Tracer la courbe (C).