

Objectifs : prendre conscience de l'intervention des nombres complexes en analyse (résolution d'équations différentielles) et sur leur utilisation en électricité / électronique.

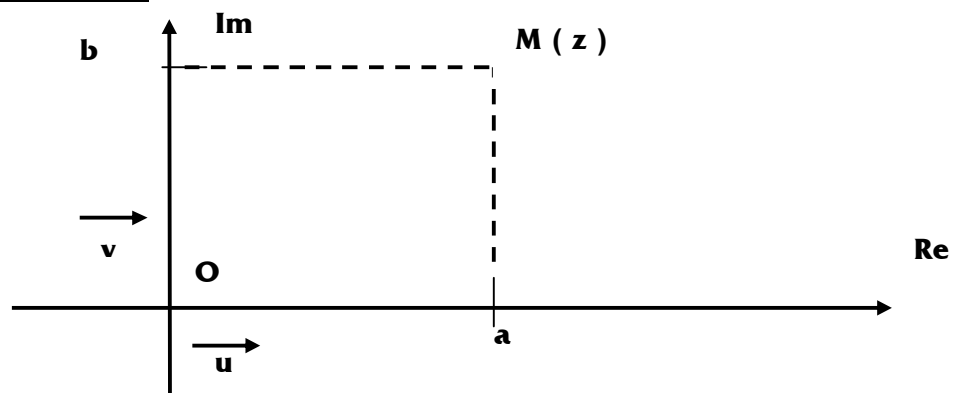
I] REPRESENTATION ALGEBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE :

1°) Définitions – propriétés :

- L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$
- Le nombre i est tel que : $i^2 = -1$
- Un nombre complexe z se note sous sa **forme algébrique** $z = a + i b$ où a et b sont des nombres réels.
- $\text{Re}(z)$ se prononce **partie réelle de z** ; $\text{Re}(z) = a$
- $\text{Im}(z)$ se prononce **partie imaginaire de z** ; $\text{Im}(z) = b$
- $|z|$ se prononce **module** de z ; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- z est l'**affixe** du point $M(a ; b)$.
- $\overrightarrow{OM}$ est le **vecteur image** de z .
- Deux nombres complexes $z = a + i b$ et $z' = a' + i b'$ sont égaux si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.
- Les opérations somme et produit sur la forme algébrique se font comme dans l'ensemble des réels (somme, produit etc.) avec $i^2 = -1$.
- Le **conjugué** de z se note $\bar{z}$; $\bar{z} = a - i b$

2°) Représentation géométrique :

Un point M d'affixe $z = a + i b$ se place dans un plan complexe, où l'axe des abscisses correspond à l'axe des réels purs, celui des ordonnées à l'axe des imaginaires purs, de la même manière qu'un point M de **coordonnées cartésiennes a et b**



3°) Lignes de niveau des fonctions associant $\text{Re}(z)$ ou $\text{Im}(z)$ à z :

Fonctions $z \mapsto \text{Re}(z)$

Dans un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ la ligne de niveau D_k de la fonction $z \mapsto \text{Re}(z)$ est l'ensemble des points dont l'affixe a une partie réelle constante, c'est la droite d'équation $x = k$.

Les lignes de niveau de la fonction $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ sont donc les droites parallèles à l'axe des ordonnées.

Fonctions $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$

Dans un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ la ligne de niveau θ_k de la fonction $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$ est l'ensemble des points dont l'affixe possède une partie imaginaire constante, c'est la **droite** d'équation $y = k$.

Les lignes de niveau de la fonction $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$ sont donc les droites parallèles à l'axe des abscisses.

II] REPRESENTATION TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE :

1°) Définitions – propriétés :

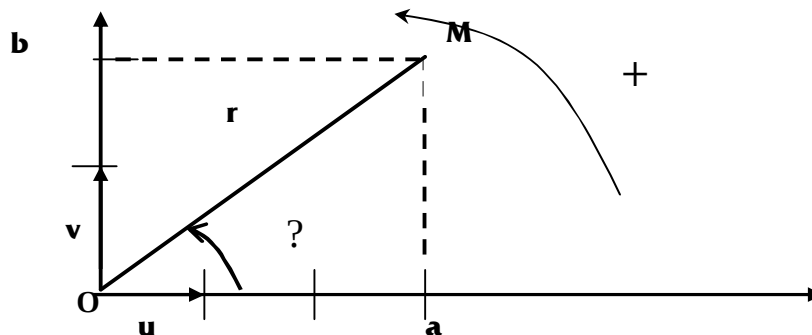
- Un nombre complexe z se note sous sa **forme trigonométrique** $z = r (\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta]$.
- r est le **module** de z ; on a $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.
- θ est l'**argument** de z . $\theta = \operatorname{mes}(\operatorname{Ox}, \overrightarrow{OM})$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{r} \end{cases}$$

- Deux nombres complexes $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r' (\cos \theta' + i \sin \theta')$ sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$ (k entier relatif).
- Le **conjugué** de z se note $\bar{z}$; $\bar{z} = r (\cos \theta - i \sin \theta)$; $z = [r, \theta]$

2°) Représentation géométrique :

Un point M d'affixe $z = [r, \theta]$ se place dans un plan complexe, où l'axe des abscisses correspond à l'axe des réels purs, celui des ordonnées à l'axe des imaginaires purs, de la même manière qu'un point défini par ses **coordonnées polaires** r et θ



On peut faire le lien entre la représentation algébrique et la représentation trigonométrique :

$$z = a + i b$$

et

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

On a donc

$$\operatorname{Re}(z) = a = r \cos \theta$$

et

$$\operatorname{Im}(z) = b = r \sin \theta$$

3°) Lignes de niveau des fonctions $|z-a|$ et $\arg(z-a)$:

Fonctions $z \mapsto |z-a|$

Si a est un nombre complexe admettant A pour image, la ligne de niveau C_k de la fonction $z \mapsto |z-a|$ est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-a| = k$ ($k > 0$) c'est donc le **cercle** de centre A et de rayon k .

Les lignes de niveau de la fonction $z \mapsto |z-a|$ sont donc les **cercles concentriques** de centre A .

Fonctions $z \mapsto \arg(z-a)$

La ligne de niveau D_θ de la fonction $z \mapsto \arg(z-a)$ est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z-a) = \theta + 2k\pi$ (θ constant, $k \in \mathbb{Z}$). L'angle $(\vec{u}; \vec{AM})$ est constant donc D_θ est la **demi droite** d'origine A (non compris).

Les lignes de niveau de la fonction $z \mapsto \arg(z-a)$ sont donc les **demi-droites** d'origine A (non compris).

4°) Notation exponentielle – Formules de Moivre et d'Euler :

On pose par définition $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Tout nombre complexe $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ peut donc se mettre sous la forme $z = r e^{i\theta}$

On a alors :

$$\overline{z} = r e^{-i\theta}$$

$$zz' = r r' e^{i(\theta + \theta')}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$$

Comme $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ on déduit la formule de Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

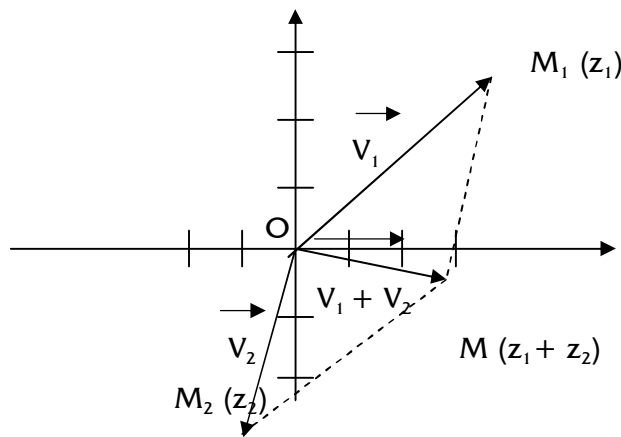
puis les formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

III] PROPRIETES COMMUNES :

1°) Addition de deux nombres complexes

Soient $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$.



Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ sont les affixes respectives de M_1 et de M_2 , donc de $\overrightarrow{OM_1} = \vec{V_1}$ et de $\overrightarrow{OM_2} = \vec{V_2}$, alors $z_1 + z_2$ est l'affixe de $\vec{V_1 + V_2}$.

L'addition de nombres complexes correspond à l'addition de vecteurs

2°) Nombre complexe conjugué :

Si $z = a + i b$, $\bar{z} = a - i b$, on démontre aisément les résultats suivants :

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

On a également:

$$z + \bar{z} = 2a \quad z - \bar{z} = 2ib \quad z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

3°) Inverse de z et quotient de deux nombres complexes :

Si $z = a + i b$, $z' = a' + i b'$, on démontre aisément les résultats suivants :

$$\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \quad \frac{z}{z'} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + i \frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}$$

4°) Forme trigonométrique : produit et quotient :

Soient $z = r (\cos ? + i \sin ?)$ et $z' = r' (\cos ?' + i \sin ?')$, on démontre et on admettra les propriétés suivantes:

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|$$
$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

IV) RESOLUTION D'EQUATIONS :

1°) Résolution de $z^2 = m$ avec m complexe :

Méthode trigonométrique :

On a $m = r.e^{jq}$; on pose $z = r.e^{ja}$.

Il faut alors résoudre le système
$$\begin{cases} r^2 = r \\ 2a = q + k.2p \end{cases}$$

On trouve les deux solutions
$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{r}.e^{j\frac{a}{2}} \\ z_2 = \sqrt{r}.e^{j(\frac{a}{2}+p)} \end{cases} .$$

Les images M_1 et M_2 de z_1 et z_2 sont symétriques par rapport à l'origine du repère. Voir exercice 4 du TD1

Méthode algébrique :

On a $m = a+jb$; on pose $z = x+jy$.

Il faut alors résoudre le système
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

- ❶ $\text{Re}(z^2) = \text{Re}(m)$
- ❷ $\text{Im}(z^2) = \text{Im}(m)$
- ❸ $|z^2| = |m|$

En réalisant ❶ + ❸, on élimine y^2 , ce qui permet d'obtenir deux valeurs pour x que l'on injecte ensuite dans ❷.

On trouve alors deux solutions opposées.

2°) Résolution de $az^2 + bz + c$ (a, b, c réels) :

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$ puis on résout l'équation $d^2 = \Delta$ qui admet deux solutions d_1 et d_2 opposées.

On démontre et on admettra le théorème suivant :

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet pour solutions :

$$z_1 = \frac{-b + d_1}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + d_2}{2a}$$

Rq : les formules ci – dessus sont identiques à celles que vous avez déjà rencontrées, puisque l'on a $d^2 = \Delta$ soit $d_1 = +\sqrt{\Delta}$ et $d_2 = -\sqrt{\Delta}$

V] TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES :

1°) Transformation (T) définie par $z' = z + b$:

Si $b = a + i \beta$ alors (T) est la **translation** de vecteur $V(a ; \beta)$

2°) Transformation (T) définie par $z' = \bar{z}$:

(T) est la **symétrie orthogonale** par rapport à (Ox).

3°) Transformation (T) définie par $z' = a z$:

(T) est la **similitude** de centre O, de rapport $|a|$ d'angle $\varphi = \arg a$.

Rq.: (T) revient à effectuer :

1. Une rotation de centre O et d'angle φ .
 2. Une homothétie de rapport $|a|$.
- OU
1. Une homothétie de rapport $|a|$.
 2. Une rotation de centre O et d'angle φ .

4°) Transformation (T) définie par $z' = 1/z$:

(T) est l'**inversion complexe**

Si M (z) et M'($\frac{1}{z}$) est l'image de M par (T), M est tel que :

- Les demi-droites [OM) et [OM') sont symétriques par rapport à (Ox).
- $OM \cdot OM' = 1$.



TD 1 – APPLICATION DU COURS



Exercice 1 – Forme trigonométrique – Notation d'Euler

Déterminez le module et un argument des nombres complexes suivants (valeurs exactes) que vous mettrez sous la forme trigonométrique en utilisant la notation d'Euler.

a) $z = 1 + i$

b) $z = -1 - i$

c) $z = -5i$

d) $z = -1 - i\sqrt{3}$

e) $z = -\sqrt{3} + i$

f) $z = \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$

Exercice 2 – Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique

Soit un nombre complexe z de module r et d'argument q . Ecrivez z sous la forme algébrique dans les cas suivants (on cherche donc à écrire $z = a + ib$) :

a) $r = 3$ et $q = \frac{\pi}{6}$

b) $r = 2$ et $q = \frac{\pi}{4}$

c) $r = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{-\pi}{3}$

d) $r = 1$ et $q = \frac{5\pi}{4}$

e) $r = 2$ et $q = 2,15$ (valeurs approchées à 10^{-3})

Exercice 3 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (Résultats sous forme algébrique)

1°) $(1 + 3i)z + 2 - 4i = 0$

2°) $z + 1 = (z - 1)(1 + i)$

Exercice 4 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (Résultats sous forme algébrique)

a) $z^2 = 5 + 12i$

b) $z^2 + 2z + 1 - i = 0$

c) $z^2 - (3 + 2i)z + 1 + 3i = 0$

d) $z^2 + 2(1+i)z - 5(1+2i) = 0$



TD 2 – APPLICATION DU COURS



Exercice 1 – Utilisation des formules de Moivre et d'Euler

En utilisant les formules de Moivre et d'Euler, on vous demande de linéariser les expressions suivantes :

1°) $\cos^3 ?$

2°) $\sin^4 ?$

Rq: linéariser consiste à écrire l'expression sans utiliser d'exposant.

Exercice 2 – Nombres complexes et géométrie

Dans un plan complexe P , à tout point m d'affixe $z = x + i y$ on fait correspondre le point M d'affixe $Z = (z + 1 + i) (\bar{z} - i)$

1. Trouver z tel que $Z = 0$.
2. Mettre Z sous forme algébrique en fonction de x et y .
3. Déterminer l'ensemble E des points m tels que Z soit un imaginaire pur. On donnera l'équation cartésienne de E .

Exercice 3 – Nombre complexes et représentation géométrique

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Quel est l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|z| = 2$? Représenter (E) .
2. Quel est l'ensemble F des points M d'affixe z tels que $\arg z = -\frac{\pi}{4}$? Représenter (F) .
3. On appelle A le point image de $1 - 3i$ et M l'image d'un nombre complexe z quelconque :
 - a) Placer A dans un plan complexe.
 - b) Quelle est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$?
 - c) Quel est l'ensemble (G) des points M d'affixe z tels que $|z - 1 + 3i| = 2$? Représenter (G) .
 - d) Quel est l'ensemble H des points M d'affixe z tels que $\arg(z - 1 + 3i) = -\frac{\pi}{4}$? Représenter (H) .



TD 3 – A REALISER EN AUTONOMIE ...



Exercice 1

On considère la transformation géométrique définie par $z' = \frac{2z-3}{z-1}$.

1. Montrer que $z' = 2 - \frac{1}{z-1}$
2. En déduire que z' s'obtient à partir de z au moyen de transformations successives (On en utilisera 4, la dernière étant $z' = 2 + z_3$)
3. Dans un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, tracer le point $M' (z')$, image de $M (z)$

Exercice 2

Dans le plan complexe, à tout point m d'affixe z non nulle, on fait correspondre le point M d'affixe Z par la transformation définie par :

$$Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

1. Choisir un point m puis construire le point M (on prendra par exemple $z = 1+i$).
2. On pose $z = r e^{iq}$ et $Z = X + iY$, exprimer X et Y en fonction de r et q .
3. Si m décrit le cercle C de centre O et de rayon R montrer que M décrit l'ellipse

d'équation $\frac{4X^2}{(R+\frac{1}{R})^2} + \frac{4Y^2}{(R-\frac{1}{R})^2} = 1$. Quel est le transformé de C ?

4. Si m décrit une droite passant par O , montrer que M décrit l'hyperbole d'équation $\frac{X^2}{\cos^2 q} - \frac{Y^2}{\sin^2 q} = 1$.

Que remarque-t-on pour les transformées des droites définies par $\theta = k$ et $\theta = -k$?

On donne pour les questions 3°) et 4°) les équations suivantes :

Equation d'ellipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Equation d'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

TD 1

Exercice 1

a) $\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{p}{4}}$ b) $\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{3p}{4}}$ c) $5 \cdot e^{-i\frac{p}{2}}$ d) $2 \cdot e^{-i\frac{2p}{3}}$ e) $2 e^{i\frac{5p}{6}}$ f) $z = e^{-i\frac{p}{4}}$

Exercice 2

a) $3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ b) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $-1,095 + 1,674 i$

Exercice 3

1°) $S = \{ 1+i \}$ 2°) $S = \{ 1 - 2 i \}$

Exercice 4

a) $S = \{ (3+2i) ; (-3-2i) \}$
 b) $\Delta = 4i$ $S = \{ (-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) ; (-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) \}$
 c) $\Delta = 1$ $S = \{ (2 + i) ; (1 + i) \}$
 d) $S = \{ (2 + i) ; (-4 - 3 i) \}$

TD 2

Exercice 1

$\cos^3 q = \frac{1}{4} \cos 3q + \frac{3}{4} \cos q$ $\sin^4 q = \frac{1}{8} \cos 4q - \frac{1}{2} \cos 2q + \frac{3}{8}$

Exercice 2

1°) $S = \{ (-1-i) ; -i \}$
 2°) $X = x^2 + x + y^2 + 2y + 1$ et $Y = -y - 1$
 3°) (E) est le cercle de centre C $(-\frac{1}{2}; -1)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

Exercice 3

1°) (E) est le cercle C (0 ;2)
 2°) (F) : $y = -x, x > 0$
 3°) (G) est le cercle de centre A (1-3i) et de rayon 2
 (H) : $y = -x - 2, x > 1$

TD 3

Exercice 1

2°) z_1 : Translation de vecteur $\overrightarrow{u_1}(-1;0)$ z_2 : Inversion complexe z_3 : Symétrie par rapport à l'origine puis z_4 : Translation de vecteur $u_2(2;0)$

Exercice 2

2°) Une ellipse 3°) Une hyperbole ; $? = \pm k$, les transformés sont confondus.