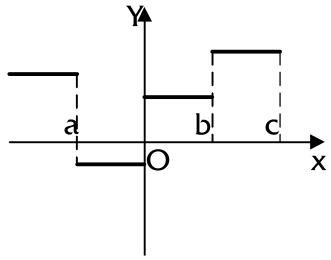
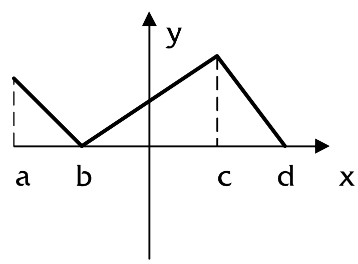
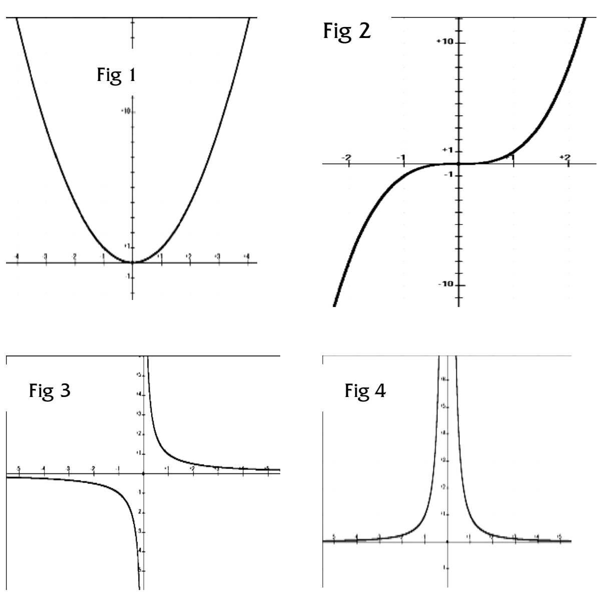
Chapitre 3

FONCTIONS D ' UNE VARIABLE REELLE – LIMITES

I] LES FONCTIONS DE REFERENCE :

Fonction en escalier 	Une fonction en escalier est constante par intervalles ici, f est définie sur : $]-\infty;a[\ \cup\ [a;0[\ \cup\ [0;b[\ \cup [b;c[$
Fonction affine par morceaux 	Sur chacun des intervalles [a;b], [b;c] et [c;d], f est de la forme f(x) = mx + p.
Fonctions puissances, $x \mapsto x^n$, n entier 	La fonction f est de la forme $f(x) = x^n$ Si n est entier positif, f est définie sur R ➢ Si n est pair, f est paire (fig 1). ➢ Si n est impair, f est impaire (fig 3). Si n est entier négatif, f est définie sur R^* fig 1 : $x \mapsto x^2$ fig 2 : $x \mapsto x^3$ fig 3 : $x \mapsto \frac{1}{x}$ fig 4 : $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

Fonctions logarithmes	Courbe associée

La fonction logarithme népérien

On appelle logarithme népérien la primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 ;+\infty[$ et qui s'annule pour $x = 1$.

On a $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Si $a > 0$ et $b > 0$, $\ln ab = \ln a + \ln b$

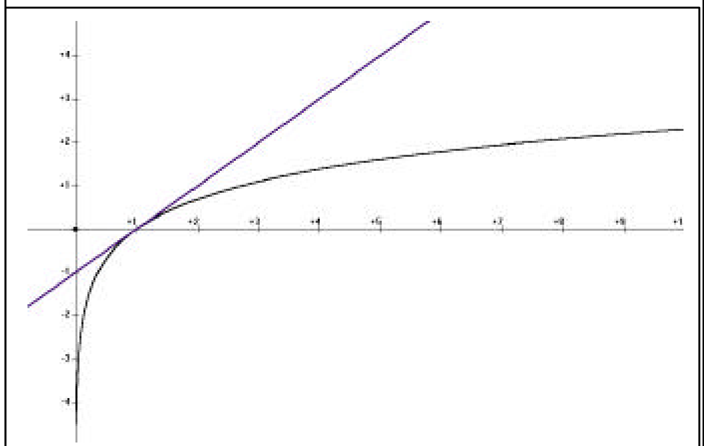
Si $a > 0$ et $b > 0$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, $\ln a^x = x \ln a$

$\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$



La fonction logarithme décimal (de base 10)	Courbe associée

La fonction logarithme décimal est la fonction notée log définie sur $]0 ;+\infty[$ par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

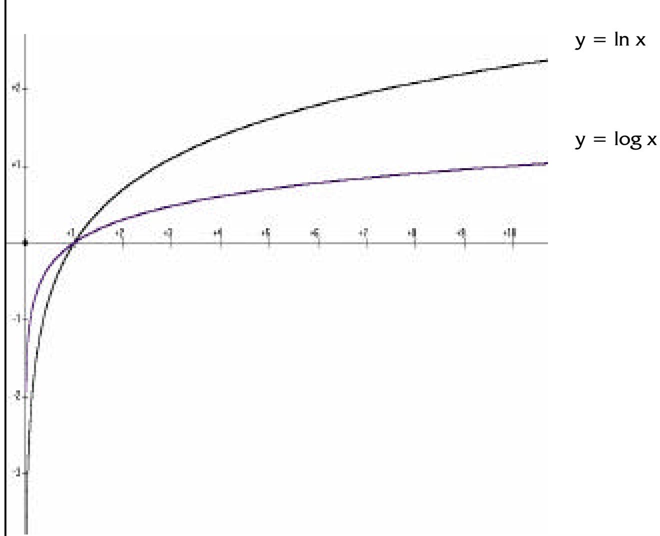
La fonction log a les mêmes propriétés que la fonction ln.

$\log 10 = 1$ et de façon plus générale :

$x \in \mathbb{R}$, $\log 10^r = r$

$\log x = r \Leftrightarrow x = 10^r$

Rq : il existe la fonction logarithme de base a, on a alors $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$



Fonctions exponentielle, puissance	Courbe associée

La fonction exponentielle

On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Elle se note exp ou e

$(e^x)' = e^x$ et $(e^u)' = u' e^u$

$\exp 0 = 1 \quad \exp 1 = e$

$x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \exp(\ln x) = x$
$x \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp x) = x$

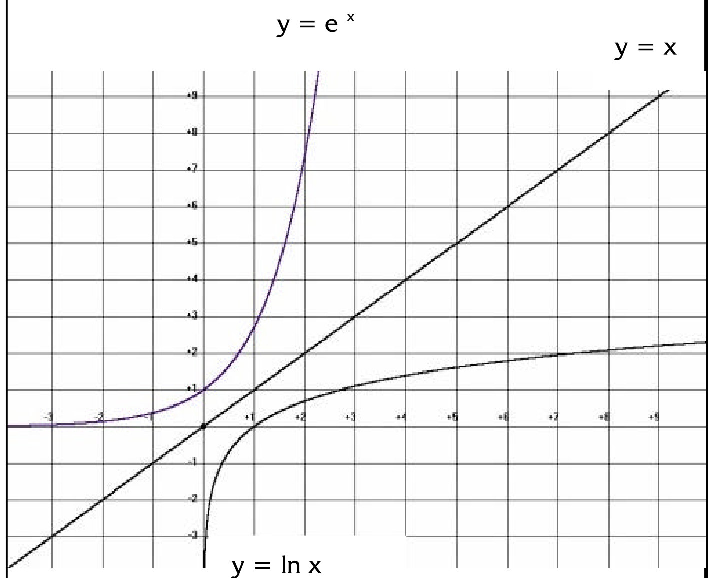
Pour a et b $\in \mathbb{R}$, on a : $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b} \qquad (e^a)^b = (e^b)^a = e^{ab}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$



Fonctions puissances	Courbes associées

Fonctions x^n avec n entier naturel non nul

La fonction $f : x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est définie sur $\mathbb{R}$.

- Elle est paire si n est paire
- Elle est impaire si n est impaire
- On l'étudie sur $[0\,;+\infty[$

$f'(x) = n x^{n-1}$ Comme $f'(x) \geq 0$, f est croissante sur $[0\,;+\infty[$

On distingue deux cas en fonction de

la parité de n.

x^n : n est pair
Symétrie par rapport à (O y)

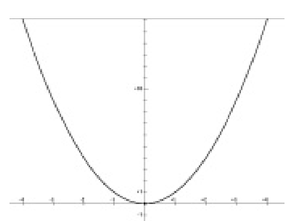
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f '(x)	-	0	+
f (x)	↘		↗

x^n : n est impair
Symétrie par rapport à O

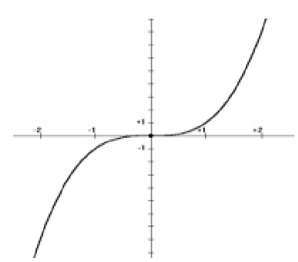
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f '(x)	+	0	+
f (x)	↗		↗

Exemples :

$f(x) = x^2$



$f(x) = x^3$



Fonctions puissances	**Courbes associées**	
Fonctions x ^{a} avec a réel et x > 0	x ^{a} avec a > 0	x ^{a} avec a < 0

f ’(x) = a x $^{a\ -1}$

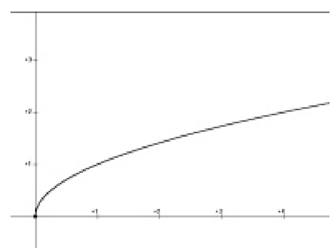
On distinguera deux cas en fonction du signe de a

L’étude de f pour x < 0 (lorsqu’elle est possible) se déduit en fonction de la parité de f.

x ^{a} avec a > 0

x	0 + ¥
f ’(x)	+
f (x)	$\nearrow$

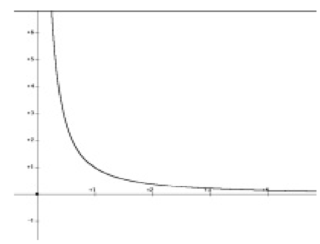
Ex : x ½ = $\sqrt{x}$



x ^{a} avec a < 0

x	0 + ¥
f ’(x)	-
f (x)	$\searrow$

Ex : x $^{-1}$ = $\frac{1}{x}$

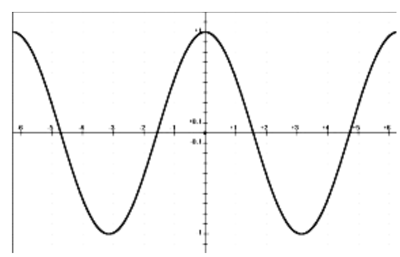


Fonctions circulaires

La fonction cosinus f : x $\mapsto$ cos x est :

- définie sur R
- périodique de période 2 ?

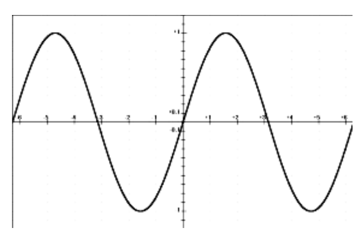
Sa dérivée est f ’ (x) = - sin x



La fonction sinus f : x $\mapsto$ sin x est :

- définie sur R
- périodique de période 2 ?

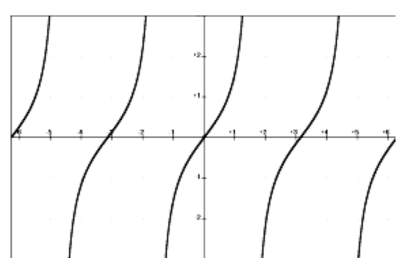
Sa dérivée est f ’ (x) = cos x



La fonction tangente f: x $\mapsto$ tg x = $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

- n’est pas définie pour x = $\frac{\Pi}{2}$ +k ?
- est périodique de période ?

f ’ (x) = 1 + tan ²x = $\frac{1}{\cos^2 x}$



LES FONCTIONS CIRCULAIRES RECIPROQUES

On admettra le théorème suivant :

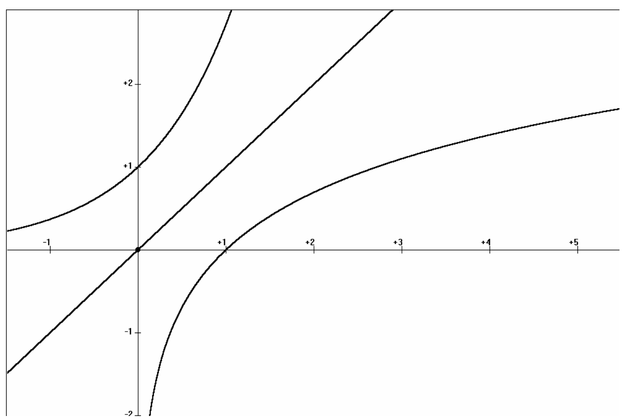
Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, alors f(I) est un intervalle. Si de plus f est **strictement monotone** sur I, deux réels distincts quelconques de I ont des images distinctes. Donc quel que soit le réel b appartenant à f(I), il existe un réel a unique tel que f(a) = b.

On dit que la fonction f, **continue et strictement monotone** sur I réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle f(I). Dans ces conditions, il existe une fonction définie sur f(I), à valeurs dans I, elle est appelée **fonction réciproque** de f, on la note $\mathbf{f^{-1}}$.

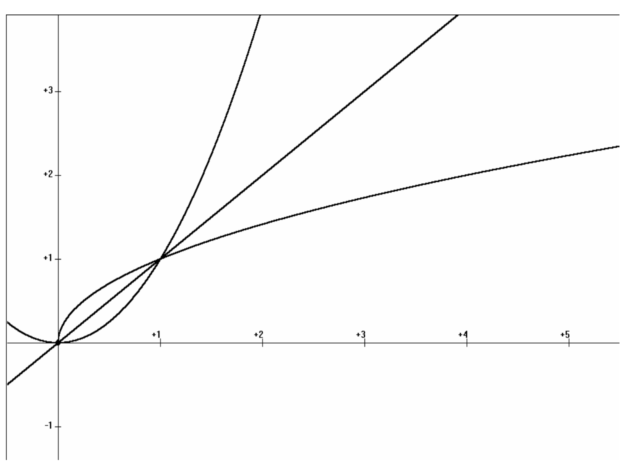
$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in I \end{cases}$$

Rq : une fonction continue sur un intervalle est une fonction dont on peut tracer la courbe « sans lever le crayon ».

Exemple : $f(x) = \ln x$ $\quad f^{-1}(x) = e^x$



Exemple 2 : $f(x) = x^2$ $\quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

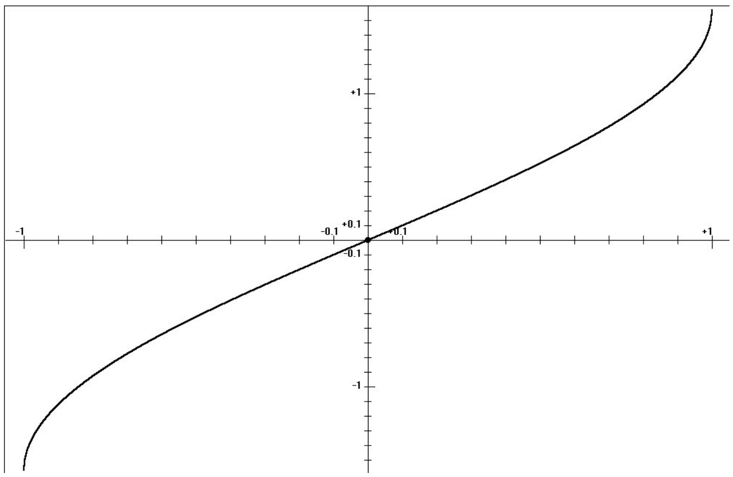


La fonction arc sinus :

Sur $[-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}]$ la fonction sinus est continue, strictement croissante et prend ses valeurs continues sur [-1 ;1]. Elle admet donc une fonction réciproque, continue, strictement croissante, définie sur [-1 ;1] prenant ses valeurs dans l'intervalle $[-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}]$.

C'est la fonction arc sinus notée $x \mapsto$ Arcsin x

$$y = \text{Arcsin } x \Leftrightarrow \text{à } x = \sin y \text{ avec } y \in [-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}]$$



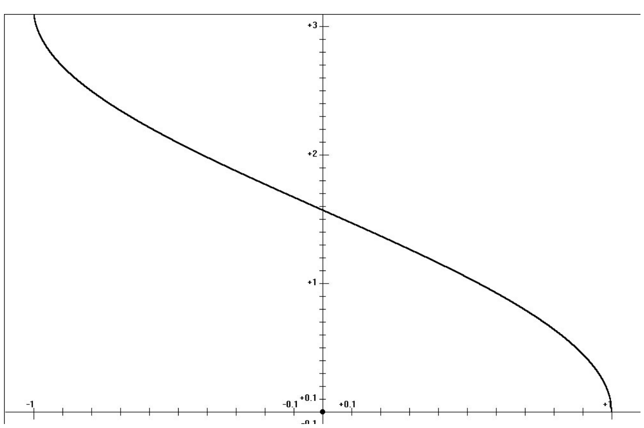
On montre que la fonction arcsin x est dérivable sur $\Re$ et on a :

$$\boxed{(\text{ arcsin } x\text{ })\text{ ‘ } = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

b) La fonction arc cosinus :

Sur $[0;\Pi]$ la fonction cosinus est continue, strictement décroissante et prend ses valeurs continues sur [-1 ;1]. Elle admet donc une fonction réciproque, continue, strictement décroissante, définie sur [-1 ;1] prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0;\Pi]$.
C'est la fonction arc cosinus notée $x \mapsto$ Arccos x

$$y = \text{Arccos } x \Leftrightarrow x = \cos y \text{ avec } y \in [0;\Pi]$$



On montre que la fonction arccos x est dérivable sur $\Re$ et on a :

$$\boxed{(\text{ arccos } x\text{ })\text{ ‘ } = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

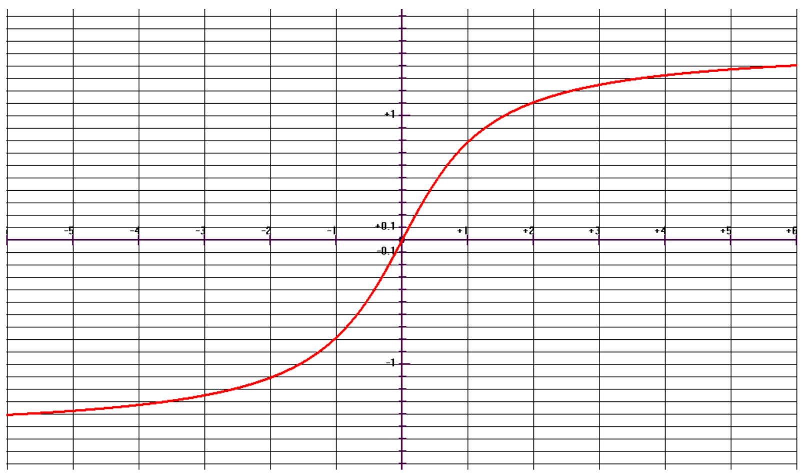
Rq : vous avez déjà utilisé ces fonctions sur vos calculatrices pour trouver un angle en degré par exemple : Arcos 0 $\Leftrightarrow$ « $\cos^{-1} 0$ » = 90 °

c) La fonction arc tangente :

Sur $]-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}[$ la fonction tangente est continue, strictement croissante et prend ses valeurs continues sur $\Re$. Elle admet donc une fonction réciproque, continue, strictement croissante, définie sur $\Re$ prenant ses valeurs dans l'intervalle $]-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}[$.

C'est la fonction arc tangente notée $x \mapsto \text{Arctan } x$

$$\boxed{y = \arctan\ x \Leftrightarrow \text{à } x = \tan y \text{ avec } y \in]-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}[}$$



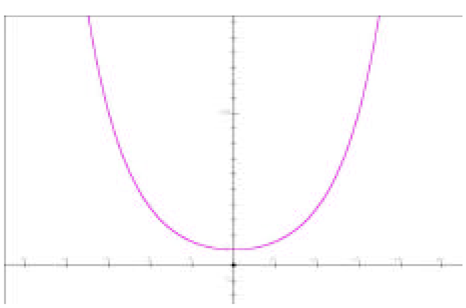
On montre que la fonction Arctan x est dérivable sur $\Re$ et on a :

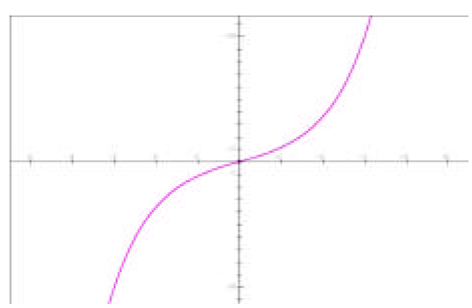
$$\boxed{(\text{Arctan } x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Ces trois fonctions, notamment leurs dérivées peuvent être utilisées pour le calcul d'une intégrale …

D'autres fonctions utilisées lors de résultat de calcul intégral, par exemple, ce sont les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, définies par :

$\text{ch } t = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t})$ et $\text{sh } t = \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t})$





Ces deux fonctions possèdent également des fonctions réciproques, Argch t et Argsht

II]ETUDE DE FONCTION :

1°) Plan d'étude de fonction :

1. Ensemble de définition.
2. Parité, périodicité, ensemble d'étude.
3. Limites et asymptotes (voir 2°)
4. Etude des variations : - Calcul de f '(x)
   - Signe de f ' (x)
   - Tableau de variations.
   - Extremums.
5. Etude de la concavité.
6. Compléments d'informations (Centre de symétrie, tangente, intersections avec les axes, position relative, etc.)
7. Tracé de la courbe.

2°) Limite d'une fonction :

a) Limite d'une fonction f en 0, en a

On dit que la fonction f tend vers 0 quand x tend vers 0, lorsque f prend des valeurs aussi proches de 0 que l'on veut dès que x est assez proche de 0.

On écrit :

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(a+h) = L$ avec $x = a + h$

D'une manière générale :

La fonction f a pour limite L en 0 signifie que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0 \\ \text{ou encore} \\ f(x) = L + ?(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} ?(x) = 0 \end{cases}$$

b) Cas d'une limite infinie :

On dit que la fonction f tend vers ∞ quand x tend vers a (ou ∞), lorsque f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut dès que x est assez proche de a.
On écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Exemples : $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{1}{x-a} = +\infty$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{1}{x-a} = -\infty$

On écrit souvent $x \to a^{+}$ ou $x \to a^{-}$

c) Opérations algébriques sur les limites :

Soient f et g deux fonctions admettant L et L' comme limite en a, nous admettrons les résultats suivants :

f +g a pour limite L + L'	$\lvert f \rvert$ a pour limite $\lvert L \rvert$
f g a pour limite L L'	$\frac{f}{g}$ a pour limite $\frac{L}{L'}$
k f a pour limite k L	$\sqrt{f}$ a pour limite $\sqrt{L}$

d) Propriétés :

Soient deux fonctions f et g définies sur R ou $]a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;b[$, on démontre et on admettra les résultats suivants :

Si pour x assez grand :

$f(x) \geq g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) \leq g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lvert f(x) - L \rvert \leq g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

Ces résultats sont valables si x tend vers a ou vers $-\infty$.

e) Polynôme et fonction rationnelle en +/- ∞ :

On admettra le théorème suivant :

Lorsque x tend vers + ou - ∞, un polynôme P(x) définit par $P(x) = \frac{Q(x)}{R(x)}$ admet comme limite le quotient des limites des termes de plus haut degré.

f) Limite d'une fonction composée :

On admettra le théorème suivant :

Si f et g sont deux fonctions ayant respectivement L et L' comme limite en a, alors la fonction composée g o f a pour limite L' en a.

g) Fonctions équivalentes :

Les fonctions f et g sont dites équivalentes au voisinage de a s'il existe un intervalle I contenant a et une fonction e définis sur I tels que pour tout x de I : $f(x) = g(x)[1 + e(x)]$ avec $\lim\limits_{x \to a} e(x) = 0$, on écrit $f \sim g$

Exemples de fonctions équivalentes au voisinage de 0 :

$\sin x \sim x$ $\qquad \ln(1+x) \sim x$

$e^x - 1 \sim x$ $\qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

Le chapitre 5 permettra d'éclaircir ces équivalences.

Propriété : si $f \sim f1$ et si $g \sim g1$ alors $f.g \sim f1.g1$ et $\frac{f}{g} \sim \frac{f1}{g1}$

h) Formes indéterminées :

On appelle Forme Indéterminée (FI) tout calcul de limite correspondant à une opération « impossible ». Les FI sont de la forme :

« $+\infty - \infty$ », « $0 . \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ »

Pour lever l'indétermination et calculer les limites des FI, on est amené à effectuer des opérations diverses :

- Factorisation (polynômes, fonctions rationnelles).
- Expression conjuguée (racines par exemples).
- Etc. voir exercices.

i) Comportement asymptotique d'une fonction :

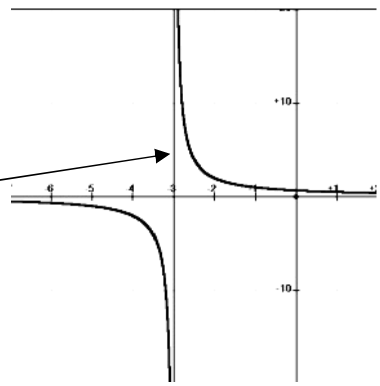
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)

alors la droite d'équation x = a est **droite asymptote verticale** à la courbe. Le signe de la limite détermine la position de la courbe.

Exemple :

$f(x) = \frac{1}{x+3}$

x=-3

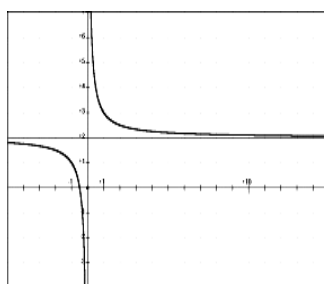


Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

La droite d'équation y = L est droite asymptote horizontale à la courbe. Le signe de f(x) –L détermine la position de la courbe.

Exemple :

$f(x) = \frac{2x+1}{x}$



y=2

Si $\lim\limits_{x \to +/-\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)

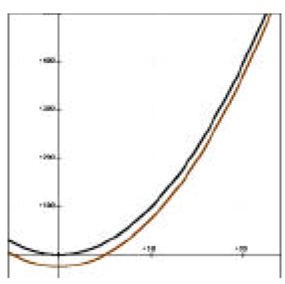
Courbes asymptotes : si f(x) = g (x) + ? (x) avec ? (x) → 0 en +/- ∞ alors les courbes f et g sont des courbes asymptotes.

Le signe de ? (x) détermine la position relative des deux courbes.

Exemple :

$f(x) = x^2$

$g(x) = x^2 - 25$



<u>Méthode pratique pour déterminer d'éventuelles asymptotes :</u>

- Calculer les limites de f(x) à droite et à gauche des points où f n'est pas définie, par exemple en a. Si les limites sont infinies, il y a une asymptote verticale d'équation x = a.

- Calculer les limites de f(x) en +/- ∞. Si la limite est finie et vaut par exemple b il y a une asymptote horizontale en en +/- ∞, d'équation y = b.

- Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en ∞. Si cette limite est finie et vaut par exemple a, calculer la limite de f(x) – a x en ∞. Si cette limite est finie et vaut par exemple b, alors y = a x + b est asymptote oblique en ∞.

<u>3°) Exemple d'étude de fonction complète :</u>

<u>Etude de la fonction f :</u>

$$f : \quad x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 5x + 8}{x - 3}$$

<u>Ensemble de définition</u>

$\boxed{D_f = \mathbb{R} / \{ 3 \}}$ (car x = 3 annule le dénominateur)

<u>Parité</u> $\quad f(-x) = \frac{x^2 + 5x + 8}{-x + 3}$

$f(-x) \neq f(x)$ donc f n'est pas paire dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

$f(-x) \neq -f(x)$ donc f n'est pas impaire dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

f n'est ni paire ni impaire, ni périodique, on l'étudie donc sur $] -\infty ; +\infty [$

<u>Limites aux bornes :</u>

- Limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty$$

Cherchons si il existe une asymptote oblique.

<u>Calculons la limite en $+\infty$ et/ou en $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$:</u>

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 8}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Cherchons la limite en $+\infty$ et/ou en $-\infty$ de $f(x) - 1.x$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x+8}{x-3} = -2$$

La droite D d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe en $+ / - \infty$

- Limites de f en x = 3

Pour x = 3, f n'est pas définie (→ « $\frac{2}{0}$ »), on cherche donc une limite à gauche de 3 et une limite à droite de 3.

<u>Méthode :</u>

<u>Limite à gauche :</u> on pose x = 3–h (avec h > 0) et on fait tendre h vers 0.

<u>Limite à droite :</u> on pose x = 3+h (avec h > 0) et on fait tendre h vers 0.

<u>**Limite de f en 3 à gauche :**</u> On pose x = 3 – h.

$$f(x) = f(3-h) = \frac{(3-h)^2 + 5(3-h) + 8}{(3-h) - 3} = \frac{9 - 6h + h^2 + 15 - 5h + 8}{-h}$$

$$= \frac{\overbrace{h^2 - 11h + 32}^{\text{tend vers } 32}}{\underbrace{-h}_{\text{tend vers } 0^-}}$$

Si h tend vers 0 (h > 0) le quotient tend vers $-\infty$.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \frac{32}{0^-} = -\infty$$

<u>**Limite de f en 3 à droite :**</u> On pose x = 3 + h.

$$f(x) = f(3+h) = \frac{(3+h)^2 + 5(3+h) + 8}{(3+h) - 3} = \frac{9 + 6h + h^2 + 15 + 5h + 8}{h}$$

$$= \frac{\overbrace{h^2 + 11h + 32}^{\text{tend vers } 32}}{\underbrace{h}_{\text{tend vers } 0^+}}$$

Si h tend vers 0 (h > 0) le quotient tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \frac{32}{0^+} + \infty$$

La limite de f en 3 à gauche est $-\infty$, la limite de f en 3 à droite est $+\infty$, la droite d'équation x = 3 est **asymptote verticale** à la courbe.

Etude des variations de f :

f (x) est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 5x+8$ et $v(x) = x - 3$

on a donc $u'(x) = 2x - 5$ et $v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{(Donné dans le formulaire)}$$

$$= \frac{(2x-5)(x-3) - (x^2 - 5x + 8).1}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-3)^2}$$

Le signe de f ' (x) dépend du signe de $x^2 - 6x + 7$ (car $(x-3)^2 > 0$).

Le discriminent vaut $(-6)^2 - 4.1.7 = 36 - 28 = 8$

Les deux racines sont $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 3 + \sqrt{2}$

$x^2 - 6x + 7$ est positif à l'extérieur de l'intervalle des racines.

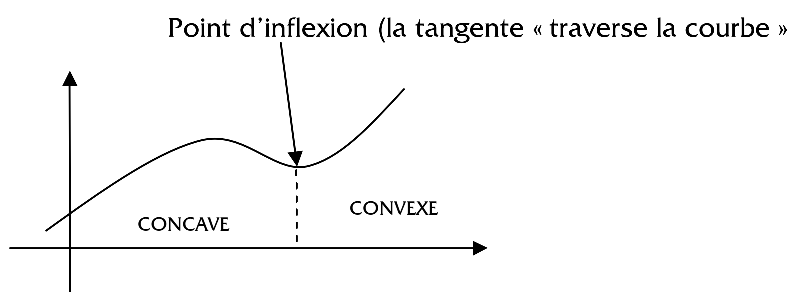
On a par factorisation des racines $x^2 - 6x + 7 = 1.[x - (3 - \sqrt{2})][x-(3 + \sqrt{2})]$

Le tableau de variations est le suivant :

x	- ∞		$3 - \sqrt{2}$		3		$3 + \sqrt{2}$		+ ¥
f '(x)		+		–	‖	–		+	
f (x)	– ¥	↗	$1-2\sqrt{2}$	↘	– ¥ ‖ + ¥	↘	$1+2\sqrt{2}$	↗	+ ¥

Concavité :

- ✓ Si f '' (x) ³ 0 sur un intervalle I, alors f est convexe.
- ✓ Si f '' (x) £ 0 sur un intervalle I, alors f est concave.
- ✓ Si f '' (x_0) = 0 et f '' change de signe en x_0 alors le point d'abscisse x_0 est un point d'inflexion.



Calcul de f '' (x) – Détermination de son signe

$$f'(x) = \frac{x^2-6x+7}{(x-3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+7).2.1.(x-3)}{((x-3)^2)^2}$$

$$= \frac{2(x-3)(x-3)^2-(x^2-6x+7).2.1.(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$= \frac{2(x-3)^2-(x^2-6x+7).2}{(x-3)^3}$$

$$= \frac{2(x^2-6x+9)-2x^2+12x-14}{(x-3)^3}$$

$$= \frac{2x^2-12x+18-2x^2+12x-14}{(x-3)^3}$$

Finalement $\quad f''(x) = \dfrac{4}{(x-3)^3}$

- f '' ne s'annule jamais donc (C) ne possède pas de point d'inflexion.
- Si $x \leq 3$, $f''(x) < 0$ donc f est **concave** sur $]-\infty ;3]$
- Si $x \geq 3$, $f''(x) > 0$ donc f est **convexe** sur $[3 ;+\infty[$

Centre de symétrie :

Pour vérifier qu'un point I (a ; b) est centre de symétrie :

- On effectue le changement de repère x = X + a et y = Y + b.
- On vérifie que f (– X) = – f (X) (f est impaire dans le repère centré en I).

Montrons que I (3 ; 1) est centre de symétrie de f.

On pose x = X + 3 et y = Y + 1

$y = \dfrac{x^2-5x+8}{x-3}$ devient $Y + 1 = \dfrac{(X+3)^2-5(X+3)+8}{(X+3)-3}$

Soit $Y = -1 + \dfrac{X^2+X+2}{X} = \dfrac{X^2+2}{X}$

Dans le repère centré en I, $f(X) = \dfrac{X^2+2}{X}$

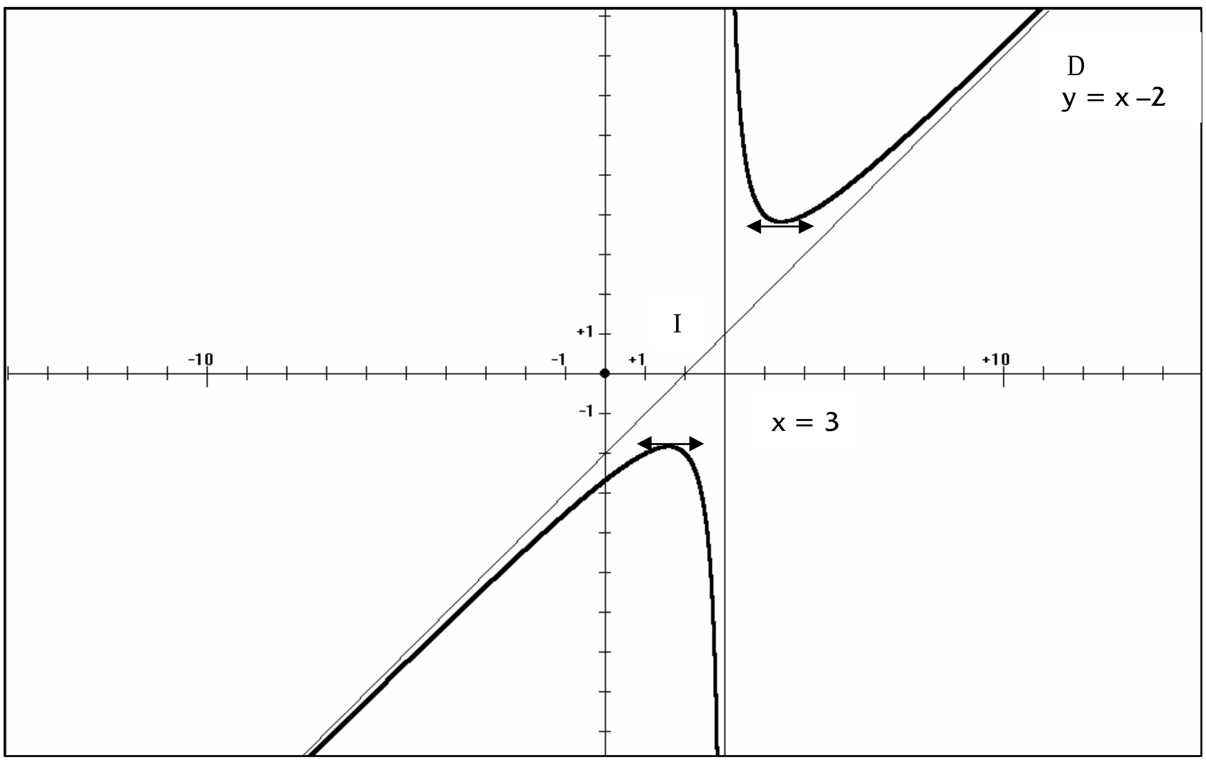
$f(-X) = \dfrac{X^2+2}{-X} = -f(X)$ donc f est impaire dans ce repère.

Finalement, I (3 ; 1) est centre de symétrie de la courbe de f

Intersections avec les axes du repère :

(C) $\cap$ (Ox)	(C) $\cap$ (Oy)
f(x) = 0 $\Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x+8}{x-3}=0$ $\Leftrightarrow x^2-5x+8 = 0$ $\Delta=(-5)^2-4.1.8 = -7 < 0$ donc pas de solution réelle S = $\varnothing$ donc (C) ne coupe pas l'axe des abscisses.	$f(0) = -\dfrac{8}{3}$ S = { (0; $-\dfrac{8}{3}$) } (C) passe par (0; $-\dfrac{8}{3}$)

Tracés



TD 1 – APPLICATION DU COURS
Limites

Exercice 1 – limites de fonction en un point

Calculer (si elle existe) la limite de f (x) pour x → 0

a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

d) $f(x) = \frac{1-\cos x}{\tan^2 x}$ e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ f) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+5x+6}$ si $x \to -2^-$ puis si $x \to -2^+$

conclure sur $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Exercice 2 – limites de fonctions de références

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{12} e^{-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^4}$ d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{e^x}{x^7}$

Exercice 3 – Calculer les limites de fonctions rationnelles suivantes

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+x}{2x-3}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

Exercice 4 – Limites et fonctions équivalentes

En utilisant les équivalences de fonctions de référence,

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{x(2+x)}$

b) Calculer $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t^2}$

c) Calculer $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{\sin t}$

TD 2 – APPLICATION DU COURS
Fonctions et asymptotes

Exercice 1 – limites et logarithmes

Soit $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. Conclure quant à la nature de l'asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$. On donnera l'équation cartésienne de cette asymptote.

3. Calculer $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

4. Conclure quant à la nature de l'asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$. On donnera l'équation cartésienne de cette asymptote.

Exercice 2 – limites et exponentielles

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x + e^{-x}$ et C sa représentation graphique dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

1. Etudier les variations de f.

2. Démontrer que C admet une asymptote oblique D dont on donnera une équation. Déterminer la position relative de C et D.

3. Montrer que C admet une tangente T parallèle à la droite d'équation $y = -x + 3$. Donner une équation de T. Construire C, D et T.

TD 3 – A REALISER EN AUTONOMIE …
Etude de fonction complète

Soit la fonction f définie par $f(x) = x - 3 + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$. Réalisez l'étude complète de cette fonction en suivant le plan d'étude donné dans ce chapitre.

RESULTATS – ELEMENTS DE REPONSE DES TD

TD 1

Exercice 1

a) 2 b) c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) Pas de limite si $x \to 0$

f) Si $x \to -2^-$, $f(x) \to +\infty$ et si $x \to -2^+$, $f(x) \to -\infty$ donc f n'admet pas de limite en 0

Exercice 2

a) 0 b) $+\infty$ c) 0 d) $+\infty$ si $x \to +\infty$ et 0 si $x \to -\infty$

Exercice 3

a) $0^{\pm}$ en $\pm\infty$ b) $0^{\pm}$ en $\pm\infty$ c) $\pm\infty$ en $\pm\infty$ d) $+\infty$

Exercice 4

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0

TD 2

Exercice 1

1. La limite cherchée vaut 0
2. $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.
3. La limite cherchée vaut $-\infty$
4. $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe.

Exercice 2

1. $f'(x) = 1 - e^{-x}$ …
2. $e^{-x} \to 0$ si $x \to +\infty$ …
3. /

TD 3

- $D_f =]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$
- f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique
- $f'(x) = \frac{x^2+2x-2}{x(x+2)} = \ldots = \frac{[x-(-1-\sqrt{3})][x-(-1+\sqrt{3})]}{x(x+2)}$
- $y = x - 3$ est asymptote oblique à (C) en $\pm\infty$
- $x = -2$ est asymptote verticale à (C)
- I (-1;4) est centre de symétrie à (C)
- Pour $(C) \cap (Ox)$, $x \approx 0{,}12$ ou $x \approx 2{,}39$. Pour $(C) \cap (Oy)$, $S = \emptyset$
- $f''(x) \neq 0$ sur D_f, donc f n'admet pas de point d'inflexion.

DEVOIR A LA MAISON 2

PROBLEME 1

$\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z. On appelle Z le nombre complexe défini par la relation suivante : $Z = z^2 - 2\overline{z} + 1$.

1. On pose z = x + i y, où x et y sont des nombres réels. Calculez en fonction de x et de y la partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z (On a donc Z = X + i Y).

2. Déterminez puis représentez dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal l'ensemble (R) des points tel que Z soit un réel.

3. Déterminez puis représentez dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal l'ensemble (N) des points tel que Z = 0.

4. Soient A, B et C les images respectives des nombres complexes dont les affixes sont : 1; -1+2i ;-1- 2i. Placez A, B et C dans le repère et montrez que ABC est rectangle et isocèle.

PROBLEME 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 12}{x^2 - 4}$

1. Déterminez D_f.

2. Montrez que f (x) peut s'écrire sous la forme $f(x) = a x + b + \frac{cx}{x^2 - 4}$

3. A l'aide des résultats du 2°/ montrez que f n'est pas périodique. On pourra montrer que si $T \neq 0$ existe alors l'équation f(x+T)=f(x) est sans solution réelle.

4. Montrez que f est impaire dans le repère $(A ; \vec{i} ; \vec{j})$ avec A (0 ;-3).

5. Etudiez les limites de f aux bornes de D_f. A l'aide de ces résultats et du 2°), déduire les asymptotes à (C) courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

6. Calculez f ' (x) puis dressez le tableau de variations de f.

7. Précisez la position de (C) par rapport à son asymptote oblique Δ

8. Déterminez une équation de (T) tangente à la courbe au point d'abscisse 3.

9. Déterminez la concavité et les éventuels points d'inflexion de f.

10. Donnez les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes du repère.

11. Tracez (C), (T) et ses asymptotes.