Chapitre 6

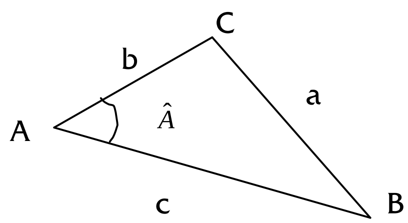
FONCTIONS DE DEUX OU TROIS VARIABLES REELLES

Objectifs :

- Appréhender la notion de fonction numérique de deux ou trois variables avec une utilisation au cas de champs de vecteurs.
- Etre capable d'appliquer ce type de fonctions dans le cadre de leur utilisation avec les intégrales multiples pour le calcul d'aires, de volumes, de masses, de moments …

Approche – exemples de fonctions de deux et trois variables

- En sciences physiques, la résistance équivalente R de deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle est donnée par la formule $R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Si nous rattachons cette formule avec des lettres utilisées en mathématiques, on écrirait $f(R_1,R_2) = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ où f serait la fonction permettant de calculer la résistance équivalente en **fonction des deux variables réelles** R_1 et R_2.
- En mathématiques, la formule pour calculer l'aire S d'un triangle quelconque, est la suivante :



$$S(b, c, \hat{A}) = \frac{1}{2}\, b\, c \sin \hat{A}$$

S est **fonction des trois variables réelles** a, b et $\hat{A}$

I] DERIVEES PARTIELLES – CHAMPS DE VECTEURS :

1°) Définition d'une fonction de deux ou trois variables :

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

> Définir une **fonction numérique de deux variables** f de D dans R, c'est faire correspondre à chaque couple (x, y) de D un réel unique noté f(x, y)

Soit D une partie de $\mathbb{R}^3$.

> Définir une **fonction numérique de trois variables** f de D dans R, c'est faire correspondre à chaque triplet (x, y, z) de D un réel unique noté f(x, y, z)

2°) Représentation d'une fonction de deux variables :

Seules les fonctions de deux variables peuvent être facilement représentées. Elles sont rencontrées dans les calculs analytiques de l'espace. Ainsi :

- L'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ est équivalente pour c non nul à :

  $z = -\frac{1}{c}(a\,x + b\,y + d)$, c'est l'équation d'un plan dans un repère quelconque.

- L'équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ $(R>0)$ est l'équation de la sphère de centre A $(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de rayon R.

De façon générale, dans un repère quelconque :

La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble des points M (x,y,f(x,y)) de l'espace associés aux couples (x,y) de la partie D de $\mathbb{R}^2$.

Rq : c'est généralement une **surface** dont la relation $z = f(x, y)$ est **l'équation**.

3°) Dérivées partielles :

Soit f une fonction de deux variables x et y. On a $f'(x,y) = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)$.

La fonction dérivée de f est égale à la **dérivée partielle de f par rapport à x** ajoutée à la **dérivée partielle de f par rapport à y**.

On écrit aussi : $f'(x,y) = \frac{d\ f(x,y)}{d\,x} + \frac{d\ f(x,y)}{d\ y}$

Exemple : soit $f(x, y) = 3\,x^2 y^2 - 5\,x\,y + y^2$. Calculer $f'(x, y)$

$\frac{d\ f(x,y)}{d\,x} =$

$\frac{d\ f(x,y)}{d\ y} =$

Donc $f'(x, y) =$ .... + ...

Finalement $f'(x, y) =$ ....

4°) Différentielle d'une fonction de deux ou trois variables :

Donnons la définition pour trois variables réelles h k et l.

On appelle **différentielle** d'une fonction f des trois variables x, y et z la fonction : $df = \frac{d\ f}{d\ x}.h + \frac{d\ f}{d\ y}.k + \frac{d\ f}{d\ z}.l$

II] GRADIENT – LAPLACIEN – DIVERGENCE – ROTATIONNEL :

1°) Champ scalaire – Champ vectoriel :

L'espace étant supposé rapporté à un repère (O ; $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$), soit E une région de l'espace associée à la partie D de R^3.

- Si la fonction f, à valeurs réelles des trois variables x, y et z est définie sur D on dit que f définit un **champ scalaire** sur E (ou sur D).

- Si la fonction $\vec{f}$ est une fonction vectorielle telle que les coordonnées X(x,y,z) ; Y(x,y,z), Z(x,y,z) du vecteur $\vec{f}$ (x,y,z) sont définies sur D, on dit que $\vec{f}$ définit un **champ vectoriel** sur E (on parlera du champ vectoriel $\vec{f}$).

2°) Gradient d'une fonction f de trois variables (ou d'un champ scalaire) :

> On appelle gradient de la fonction f (ou du champ scalaire f) le champ vectoriel noté $\overrightarrow{grad}$ f de coordonnées f'_x(x,y,z), f'_y(x,y,z), f'_z(x,y,z).

- Le gradient ne dépend pas du repère choisi.
- On appelle surfaces de niveau de f les surfaces d'équation f (x,y,z) = k (k constante réelle) ; on montre qu'il passe une seule ligne de niveau en tout point $M(x_0,y_0,z_0)$ et qu'en ce point $\overrightarrow{grad}$ f est normal à la surface de niveau.

3°) Laplacien d'une fonction f de trois variables :

Si la fonction f possède des dérivées secondes alors :

> On appelle Laplacien de f (ou du champ scalaire f) la fonction scalaire :
>
> $$\Delta_f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

4°) Divergence et rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{f}$:

Soit $\vec{f}$ une fonction vectorielle des trois variables x, y, z définies sur D.

> On appelle divergence de la fonction $\vec{f}$ (ou du champ vectoriel f) la fonction scalaire notée div $\vec{f}$, définie par :
>
> $$\text{div } \vec{f} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Exemple : **soit $\vec{f}$ (x^2yz ;xy^2z ;xyz^2) que vaut div $\vec{f}$?**

div $\vec{f}$ = ……….

On appelle rotationnel de la fonction $\vec{f}$ (ou du champ vectoriel f) la fonction vectorielle désignée par $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{f}$, définie par :
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{f}\ \left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)$

Exemple : **soit $\vec{f}$ (x^2yz ;xy^2z ;xyz^2) que vaut $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{f}$?**
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{f}$ = (………. ; ………. ; ……….)

5°) Propriétés des vecteurs divergence et rotationnel :

- Si $\vec{f}$ (x,y,z) = $\vec{k}$ (vecteur constant) alors div $\vec{f}$ = 0 et rot $\vec{f}$ = 0.
- $\overrightarrow{rot}\ (\overrightarrow{grad}\ \vec{f}) = \vec{0}$ et div $(\overrightarrow{rot}\ \vec{f}) = 0$

III] APPLICATION AUX CALCULS DE SURFACES :

1°) Notions d'intégrale double :

De même qu'une intégrale simple se définit sur une droite, une intégrale triple se définit sur un domaine D du plan.

Par exemple I = $\iint_D f(x,y)dxdy$, où D est le domaine délimité par :

- les droites x = a et x = b,
- les droites y = c et y = d.

2°) Pratique du calcul d'une intégrale double :

On démontre et on admettra la propriété suivante pour D tel que défini au 1°) :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

3°) Application au calcul d'un moment :

Le moment m_{Oy} par rapport à Oy d'une plaque homogène, définie par :

$0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$ de masse surfacique m (et de masse M = m ab) est égal à :

$\iint_D x^2 m dxdy = \int_0^a mx^2 dx \int_0^b dy = \int_0^a mbx^2 dx$, soit $m_{Oy} = m\ b\left[\frac{X^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{3} m a^3 b = \frac{1}{3} M a^2$

Exercice : retrouver ce résultat en changeant l'ordre des intégrations.

$\iint_D x^2 m dxdy$ = ………………

III] APPLICATION AUX CALCULS DE SURFACES :

1°) Notion d'intégrale triple :

De même qu'une intégrale double se définit sur un domaine plan, une intégrale triple se définit sur un domaine D de l'espace.

On a par exemple, I = $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ où D est le domaine délimité par :

- les droites x = a et x = b,
- les droites y = c et y = d,
- les droites z = e et z = f.

2°) Pratique de calcul d'une intégrale triple :

Soit I = $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ Si on a :

- f (x,y,z) = u(x) v(y) w (z),

- a ≤ x ≤ b et c ≤ y ≤ d et e ≤ z ≤ f.

On démontre et on admettra la propriété suivante :

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b u(x)dx \int_c^d v(y)dy \int_e^f w(z)dz}$$

3°) Application – exemple de calcul de volume à l'aide d'une intégrale triple :

Soit V = $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ où D est tel que :

- f (x,y,z) = x^2 y^2 z,

- -1 ≤ x ≤ 2 et 0≤ y ≤ 3 et 1 ≤ z ≤ 5.

V = $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$

= ………………………………………………………………………………

= ………………………………………………………………………………

= ………………………………………………………………………………

Finalement V = ……….

TD 1 – APPLICATION DU COURS

Exercice 1 – Calculer les dérivées partielles suivantes

a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

c) $-f(x,y) = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y}{x^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Gradient – Laplacien – Rotationnel - Divergence

Exercice 2

On donne le champ scalaire f tel que $f(x,y,z) = 2x^2y - xz^3$.

1. Déterminer par ses coordonnées $\overrightarrow{grad}\, f$.
2. Calculer le Laplacien Δf.

Exercice 3

On donne le champ scalaire $\vec{f}$ de coordonnées :

$$X = x^3 y z^4$$
$$Y = -x^2 y^3 z^3$$
$$Z = 2x^4 y^2 z^3$$

1. Calculer div $\vec{f}$.
2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{rot}\ \vec{f}$.

Exercice 4

Montrer que la fonction f telle que $f(x,y) = 2xy - 2x^2 - y^2 - 2x + 6y - 8$ admet un maximum en un point $(x_0\,;y_0)$ à déterminer.

TD 2 – APPLICATION DU COURS
Intégrales multiples

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes

a) $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} \frac{x^2 dy}{1+y^2}$ b) $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)dx$

Exercice 2

Soit le domaine D délimité par le triangle OAB, avec O(0 ;0) A(1 ;0) et B(1 ;1)

Calculer $\iint_D xy^2 dxdy$

Exercice 3 – Calculer les intégrales suivantes

a) $\int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=2} \int_{z=2}^{z=4} (x+y+z)dxdydz$ b) $\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1-x} \int_{z=0}^{z=1-x-y} xyzdxdydz$

Exercice 4

Soit constitué par la sphère de centre O et de rayon R.

Calculer $\iiint_D zdxdydz$

TD 3 – A REALISER EN AUTONOMIE …

Enoncés donnés par votre formateur