Chapitre 1

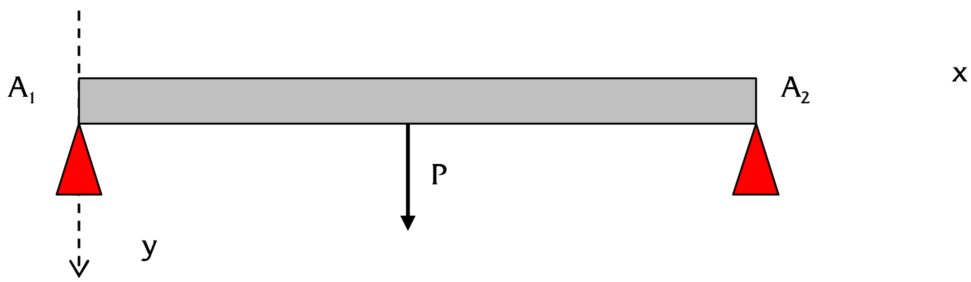
EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Objectifs :

- Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre a (t) x' + b(t) x = c(t)
- Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants dont le second membre est une fonction exponentielle polynôme du type $e^{at} P(t)$.

I] OBTENTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE :

Exemple résolu : Considérons une poutre de longueur l posée sur deux points d'appui A_1 et A_2. Cette poutre supporte en son milieu une charge P.



La charge appliquée au milieu de la poutre provoque un fléchissement. On va déterminer l'équation y = f (x) de la déformée de la poutre (une fonction qui pour chaque x – abscisse d'un point de la poutre – associe le fléchissement y de la poutre).

- On démontre et on admet que : $y'' = \frac{-P}{2EI} x$ où E (en Newton x mm ²) est le module d'élasticité longitudinale et I en mm ⁴ est le moment d'inertie de la poutre.

  $y'' = \frac{-P}{2EI} x$ est une équation différentielle du second ordre.
- Si on intègre cette équation, on obtient :

  $y' = \frac{-P}{2EI} \frac{x^2}{2} + c$ où c est une constante à déterminer.
- Le fléchissement est maximal au milieu de la poutre donc y' s'annule pour $x=\frac{l}{2}$.

  D'où $\frac{-P}{2EI} \frac{l^2}{8} + c = 0$, ce qui nous donne $c = \frac{Pl^2}{16EI}$

  On a donc $y' = \frac{-P}{4EI} x^2 + \frac{Pl^2}{16EI}$

- Si on intègre une nouvelle fois, on obtient :

  $y = \frac{-P}{4EI} \frac{x^3}{3} + \frac{Pl^2}{16EI} x + d$ où d est une constante à déterminer.

Comme en x = 0 le fléchissement est nul (c'est un point d'appui), on a 0 = 0 + 0 +d, ce qui nous donne d = 0.

$$\boxed{\text{Finalement } y = \frac{P}{48EI} x (3 l^2 - 4 x^2)}$$

Exemples d'équations différentielles en sciences économiques et technologiques :

1. Après un certain temps t (années) la valeur de revente V(t) d'une voiture vérifie l'équation différentielle (E) : V'(t) + 0,2 V(t) =0.
   Sachant que V(0) = 60 (kF), vérifier que V(t) = 60 $e^{-0,2t}$ est solution.

   V ' (t) = ……………………………………………….

   = ……………………………………………….

   V ' (t) + V (t) = ……………………… donc V (t) vérifie bien (E).

2. En électricité l'équation L $\frac{di}{dt}$ + R i = e(t) permet de déterminer l'intensité du courant qui s'établit dans un circuit R, L, C soumis à une force électromotrice e(t) dépendant du temps.

3. En mécanique, l'étude du mouvement d'un point matériel M de masse mobile m sur un axe et soumis à une force attractive d'un point O de l'axe proportionnelle à la distance conduit à une équation différentielle du type x'' + b x = 0 où x, fonction du temps définit la position du point M sur l'axe.

II] EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE :

1°) Définition :

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I : on appelle **équation différentielle** du énième ordre, toute relation entre la variable, la fonction f et les dérivées de cette fonction jusqu'à l'ordre n si elles existent.

2°) Equation différentielle a (t) x ' +b(t) x = 0 (avec a non nul) :

Théorème : si a(t) et b(t) sont des fonctions continues sur un intervalle I (a (t)$\neq$0 sur I) ; la solution générale de l'équation différentielle a (t) x ' +b(t) x = 0 est la fonction x définie sur I par x(t) = C $e^{-F(t)}$ où C est une constante arbitraire et F une primitive de la fonction $\frac{b}{a}$.

Exemple :

Résoudre sur R l'équation différentielle x ' – 2 x = 0.

A l'aide du théorème ci dessus :

- $\frac{b}{a}$ vaut ici $\frac{-2}{1}$ soit –2
- - 2 a pour primitive –2 t
- La solution est donc x = C.$e^{-(-2t)}$ soit x = C.e^{2t}

3°) Equation différentielle a (t) x ' +b(t) x = c(t)   (1):

Méthode de «la variation de la constante»:

On prend pour nouvelle inconnue la fonction z : $t \mapsto x(t)\, e^{F(t)}$, soit $x(t) = z(t)\, e^{-F(t)}$, on a alors $z'(t) = \dfrac{c(t)}{a(t)}\, e^{F(t)}$ dont l'intégration est immédiate si on connaît une primitive.

Règle pratique pour résoudre a (t) x' + b(t) x = c(t) (1)

> On cherche la solution générale de l'équation sans second membre :
> $$a(t)\, x' + b(t)\, x = 0 \quad (2)$$
>
> Si $t \mapsto C.\varphi(t)$ (où C est une constante) est la solution générale de (2), on cherche une fonction dérivable z telle que la fonction $t \mapsto z(t)\,.\varphi(t)$ soit solution de (1) (C devient la fonction z).
>
> On obtient alors une équation de la forme z ' = d (t). On est amené à chercher une primitive D (t) de d(t) d'où la solution particulière $D(t).\varphi(t)$.

Exemple : résoudre sur $I =]0\,;+\infty[$ l'équation différentielle : $t\,x' - 2\,x = t^3.\, e^t$ (1)

- On résout sur I l'équation différentielle $t\,x' - 2\,x = 0$.

  $\dfrac{b}{a}$ vaut $-\dfrac{2}{t}$ qui a pour primitive $-2 \ln t$

  $$\text{donc } x(t) = C\,e^{-(-2\ln t)} = C\,e^{2\ln t} = C\,e^{\ln(t^2)} = C\,e^{\ln(t^2)} = C\,t^2$$

  ❶ <u>La solution sans second membre de (2) est définie par $x(t) = C\,t^2$</u>

- **<u>Variation de la constante</u>** (C ci dessus) : on pose $x = z\,t^2$ soit $x' = z'\,t^2 + 2t\,z$

  L'équation (1) revient à :

  $$t.(z'\,t^2 + 2t.z) - 2z.t^2 = t^3.\,e^t \iff z'\,t^3 + 2\,t^2 z - 2\,z\,t^2 = t^3 e^t \iff z'\,t^3 = t^3 e^t \iff z' = e^t \iff z = e^t$$

  ❷ <u>Une solution particulière de (1) est donc $x = t^2 e^t$</u>

La solution générale de (1) est donc définie par : $x(t) = C.t^2 + t^2.e^t$ (❶ + ❷)

III] EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE :

1°) Equation différentielle $a x'' + b x' + c.x = 0$ (a non nul) :

On associe à l'équation différentielle, l'équation $a r^2 + b r + c = 0$ appelée **équation caractéristique**. On démontre et on admettra les résultats donnés ci dessous (**dans le formulaire**)

Equation caractéristique $a r^2 + b r + c = 0$	Solutions de l'équation $a x'' + b x' + c x = 0$
$\Delta > 0$, 2 racines réelles r_1 et r_2	$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
$\Delta = 0$, 1 racine double réelle r_0	$x = (C1\, t + C2)\, e^{r_0 t}$
$\Delta < 0$, 2 racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\,\beta$ et $r_2 = \alpha - i\,\beta$	$x = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$

2°) Equation différentielle $a x'' + b x' + c x = f(t)$:

Les solutions de l'équation (E) : $a x'' + b x' + c x = f(t)$ s'obtiennent en ajoutant à l'une d'entre elles, toutes les solutions de l'équation $a x'' + b x' + c x = 0$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle du second ordre :

$$x'' + 4x = 2t \cos 2t \quad (E) \qquad (1.x'' + 0.x' + 4.x = 2t \cos 2t)$$

- **Equation sans second membre (essm)** :

L'équation caractéristique est : $1.\, r^2 + 0.r + 4 = 0$

$\Delta = 0^2 - 4\,(1)(4) = -16 = 16\, i^2$ (car $i^2 = -1$), ce qui nous donnent deux solutions :

$r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$ soit $r_1 = 0 + i\,.\,2$
et $r_2 = 0 - i\,.\,2$

On a donc : $\alpha = 0$ et $\beta = 2$

A l'aide du formulaire on obtient $x(t) = e^{0.t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$

Comme $e^0 = 1$

❶ La solution générale est donc $\boxed{x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t}$

(E) s'écrit $x'' + 4x = 2t\left(\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right) = t(e^{2it} + e^{-2it}) = t\,e^{2it} + t\,e^{-2it}$. Le terme $t\,e^{-2it}$ sera déduit de la « résolution » de $t\,e^{2it}$ (Il suffira de remplacer i par – i → voir ✪)

➩ **Cherchons une solution particulière** de l'équation $x'' + 4x = t.e^{2it}$, de la forme $x = z.e^{2it}$.

$x' = (z' + 2iz)\,e^{2it}$ $\qquad$ $x'' = (z'' + 4iz' - 4z)\,e^{2it}$.

On a $\underbrace{(z'' + 4iz' - 4z)\,\cancel{e^{2it}}}_{x''} + \underbrace{4\,z\,\cancel{e^{2it}}}_{x} = t.\cancel{e^{2it}}$

$\Leftrightarrow \quad z'' + 4iz' - 4z + 4z = t$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{z'' + 4\,i\,z' = t}$

On en déduit que , z' est donc un polynôme de degré 1 (car t est de degré 1) à déterminer.

On pose $z' = \alpha t + \beta$, on déduit $z'' = \alpha$

Soit $\alpha + 4i(\alpha t + \beta) = t$, en identifiant terme à terme, on obtient :

$$\alpha = \frac{1}{4i} \text{ et } \beta = \frac{1}{16}$$

D'où $z' = \frac{t}{4i} + \frac{1}{16}$ soit $z = \frac{t^2}{8i} + \frac{t}{16}$

Une solution particulière de $x'' + 4x = t.\,e^{2it}$ est donc :

$$x_1 = \left(\frac{t^2}{8i} + \frac{t}{16}\right).\,e^{2it}$$

Une solution particulière de $x'' + 4x = t.\,e^{-2it}$ est donc :

$$x_2 = \left(\frac{t^2}{-8i} + \frac{t}{16}\right).\,e^{-2it}$$ (En remplaçant i par –i) ✪

Une solution particulière de (E) est donc :

$$x_1+x_2 = \frac{t^2}{4}\left(\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}\right) + \frac{t}{8}\left(\frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2i}\right)$$

$$x_1+x_2 = \frac{t^2}{4}\sin 2t + \frac{t}{8}\cos 2t$$ ❷

La solution générale de (E) est donc l'ensemble des fonctions f définies par :

$$f(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{t^2}{4}\sin 2t + \frac{t}{8}\cos 2t \quad (❶ + ❷)$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU 2ème ordre (E) : a x '' + b x ' + c x = f(t)
« RECETTE »

1ère étape : recherche d'une solution sans second membre : x_{ssm}

Voir formulaire pour la résolution de a x '' + b x ' + c x = 0
→ On obtient x_{ssm} (❶)

2ème étape : recherche d'une solution particulière : x_p

On effectue un changement de variable suivant l'allure de f(t) :

- Si $f(t) = e^{mt} . P(t)$
  On pose $x_p = z(t)\, e^{mt}$ et on cherche z(t) (un polynôme), en calculant x_p ', x_p '' et en les remplaçant dans (E) puis en identifiant on obtient alors x_p(❷)

- Si $f(t) = A. \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t)$.
  On pose $x_p = C_1.\cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t)$ et on cherche C_1 et C_2.
  En calculant x_p ', x_p '' et en les remplaçant dans (E) puis en identifiant on obtient alors x_p(❷)

- Si f (t) est un polynôme de degré n.
  On cherche x_p = P (t), un polynôme de degré :
  - n : si $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$.
  - n+1 : si $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c=0$.
  - n+2 : si $a \neq 0$; $b = 0$; $c=0$.

  En calculant x_p ', x_p '' et en les remplaçant dans (E) puis en identifiant on obtient alors x_p(❷)

Si f(t) ne correspond à aucun des 3 cas précédents, on utilise la méthode de variation de la constante en faisant varier la constante de la solution : x_{ssm} , en calculant x ', x '' et en les remplaçant dans (E) puis en identifiant on obtient alors x_p(❷)

La solution générale x_g de (E) est $x_g = x_{ssm} + x_p$ = (❶ + ❷)

TD 1 – APPLICATION DU COURS
EQUATIONS DIFFERENTIELLES SANS SECOND MEMBRE

N'oubliez pas de travailler avec votre Formulaire

Exercice 1 - Résoudre les équations différentielles suivantes

a) $y' + y = 0$ avec $y(0) = 3$

b) $y' + 5y = 0$ avec $y'(0) = 10\,e$

c) $13\,y' - 2\,y = 0$ avec $y(13) = e^{2}$

d) $y' - y \ln 3 = 0$ qui prend la valeur 9 pour $x = 1$

ln 3 est une constante …

e) $y' = \frac{2}{3}y$: Donnez la solution telle que la courbe intégrale admette au point d'abscisse 1,5 une tangente de coefficient directeur e.

En un point d'abscisse a, le coefficient directeur de la tangente à la courbe associée à une fonction f est donné par $f'(a)$.

Exercice 2 – Résoudre les équations différentielles suivantes

a) $9\,y'' - 12\,y' + 4\,y = 0$; $y(1) = 0$ et $y'(0) = \frac{1}{3}$.

b) $2\,y'' - 7\,y' - 15\,y = 0$; $y(0) = 3$ et $y'(0) = -1$.

TD 2 – APPLICATION DU COURS
EQUATIONS DIFFERENTIELLES AVEC SECOND MEMBRE

Résoudre les équations différentielles suivantes

a) $y'' - 7y' + 5y = 2t^2 + 3t$

b) $x'' + 4x' + 8x = 3\sin t - \cos t$

c) $x y' + 2y = \dfrac{2}{x(x+1)}$ (y est une fonction de x)

TD 3 – DU COTE DE L'EXAMEN …

Exercice 1 – D'après BTS MAVA 2004 – Exercice 2 – Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + (0,4\,x)\,y = 0,4\,x$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (Eo) : $y' + (0,4\,x)\,y = 0$.

2. Montrer que la fonction constante h, définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = 1$, est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Vérifier que la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x) = 1 - e^{0,2\,x}$ est la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $F(0) = 0$.

Exercice 2 – D'après BTS MAVA 2003

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2\,e^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur R, et y ' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur R de l'équation différentielle (Eo) : $y' + y = 0$.

2. Soit h la fonction définie sur R par $h(x) = 2\,x\,e^{-x}$. Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormal, passe par le point de coordonnées (0, 3).

TD 4 – A REALISER EN AUTONOMIE …

Exercice 1

Soit (E) l'équation différentielle $3y' - 7y = 2e^{-x}$.

1. Déterminez le réel a pour que $y_1 = a e^{-x}$ soit une solution de (E).
2. Montrez que y est solution de (E) si et seulement si $y - y_1$ est solution de l'équation différentielle (E') : $3y' - 7y = 0$.
   Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E)
3. Donnez la solution f de (E) telle que : $y(0) = \frac{4}{5}$.

Exercice 2 - Résoudre l'équation différentielle suivante

(E) : $y'' + 16y = 2\sin 2x - 3\cos 2x$.