Chapitre 4

DENOMBREMENTS – CALCULS DES PROBABILITES

I] DENOMBREMENTS :

Objectifs : savoir utiliser une des méthodes de dénombrements parmi les suivantes :

- Liste complète des cas.
- Schémas concrets (cases, arbres, schémas etc.)
- Modèles mathématiques (applications, bijections).
- Formules connues (arrangements, permutations, combinaisons etc.)

1°) Formule 2^n :

Considérons le schéma suivant constitué par une suite de n cases dont le contenu peut être 0 ou 1.

0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1	………………	………………	………………	0 ou 1	0 ou 1

Le nombre de dispositions différentes est $\underbrace{2x2x2x2x\ldots\ldots\ldots x2}_{\text{n fois}} = 2^n$.

2°) Généralisation : formule p^n :

Considérons le schéma suivant constitué par une suite de n cases dont le contenu peut contenir une valeur parmi p.

Le nombre de dispositions différentes est $\underbrace{p \times p \times p \times p \times \ldots\ldots\ldots \times p}_{\text{n fois}} = p^n$.

3°) Arrangements, formule A_n^p

Considérons une suite de p cases, dans lesquelles on peut placer sans répétition un objet quelconque pris parmi n objets distincts ($n \geq p$). On forme ainsi sans répétition toutes les dispositions possibles, que l'on désigne sous le nom d'arrangements **de n objets pris p à p (ou de p objets pris parmi n).** On parle également des **permutations de p objets pris parmi n.** Leur nombre noté A_n^p est donné par la formule :

$$A_n^p = \mathbf{n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ (n-p+1)} \quad \rightarrow \textbf{p facteurs}$$

4°) Permutations :

Définition

Considérons une suite de n objets que l'on peut ranger dans n cases, le nombre de dispositions possibles est alors :

$$\boxed{A_n^n = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-n+1) \quad = n\,!}$$

Permutations avec répétitions (complément)

Si dans les n objets données, p d'entre eux sont indiscernables, le nombre des permutations distinctes des n objets est égal à $P_{n,p} = \dfrac{P_n}{p!} = \dfrac{n!}{p!}$

Généralisation :

Si p objets sont semblables entre eux, q autres sont semblables entre eux, r autres sont semblables entre eux, le nombre ses permutations distinctes des n objets est égal à $P_n\,(p,q,r) = \dfrac{P_n}{p!q!r!} = \dfrac{n!}{p!q!r!}$

5°) Combinaisons :

Définition :

Etant donné n objets formant un ensemble E, on appelle combinaison de p objets pris parmi n, toute partie de E à p éléments (comprenant p ! arrangements distincts en rangeant les p objets de toutes les façons possibles).

En prenant toutes les combinaisons et en rangeant ses éléments, on obtient tous les arrangements possibles, chacun étant obtenu une seule fois.

Le nombre total des combinaisons de p objets pris parmi n, noté C_n^p est donc :

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Propriétés des combinaisons :

$$C_n^p = C_n^{n-p} \qquad\qquad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^p + \ldots + C_n^{n-1} + 1 = 2^n$$

6°) Formule donnant (a + b) ⁿ :

On a:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1\, a^{n-1}\, b + C_n^2\, a^{n-2}\, b^2 + \ldots + C_n^p\, a^{n-p}\, b^p + \ldots + b^n$$

Triangle de pascal :

A partir de la formule $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

p / n	0	1	2	3	4	5	6…
0	**1**						
1	**1**	**1**					
2	**1**	**2**	**1**				
3	**1**	**3**	**3**	**1**			
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**		
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**	
6…	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1…**

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1 – Mains de cinq cartes

On considère une main de cinq cartes prises dans un jeu de 52.

1. Combien en existe – t – il contenant 2 cœurs, 2 piques et un trèfle ?
2. Combien en existe – t – il contenant au moins 2 cœurs et au moins 2 piques?
3. On tire les cinq cartes l'une après l'autre, dans combien de cas distincts obtiendra – t – on dans l'ordre 2 cœurs puis 3 piques ?

RESOLUTION

1. Il existe C_{13}^2 groupes de 2 cœurs, C_{13}^2groupes de 2 piques et 13 trèfles. Le nombre de mains possibles est C_{13}^2x C_{13}^2 x 13 = $(\frac{13x12}{2})^2$x 13 = 79 092.

2. On dénombre trois possibilités favorables :
   - ✓ 2 cœurs, 2 piques, 1 carreau ou un trèfle : $C_{13}^2 x C_{13}^2 x26$
   - ✓ 3 cœurs, 2 piques : $C_{13}^3 x C_{13}^2$
   - ✓ 2 cœurs, 3 piques : $C_{13}^2 x C_{13}^3$

   Au total $C_{13}^2 x C_{13}^2 x26$ + $C_{13}^3 x C_{13}^2$ + C_{13}^2 xC_{13}^3 = 202 800

3. $A_{13}^2 x A_{13}^3$ =13x12 x 13x12x11=267 696

Exercice 2 – Suite de signes et de couleurs :

1. Combien de suites différentes de signes peut on former avec 3 points et 5 traits ?
2. On forme une suite de couleurs avec dix dominos dont 5 sont bleus, 3 sont rouges et 2 sont verts. Combien de suites différentes peut on former ?

RESOLUTION

1. Il s'agit d'une permutation avec répétition soit $\frac{8!}{3!5!}=56$.

   C'est également le nombre de façons de choisir la place des 3 points parmi les 8 signes.

2. C'est encore une permutation avec répétition. Le nombre cherché est $\frac{10!}{5!3!2!}=$ 2 520.

TD 1 – APPLICATION DU COURS
DENOMBREMENTS

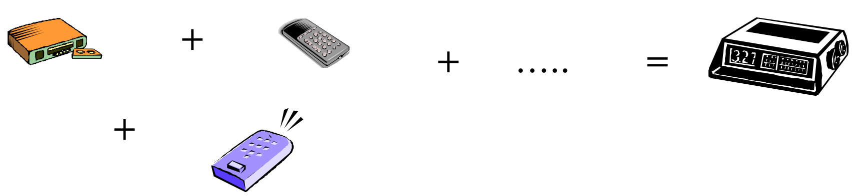
Exercice 1

Dans une station service, deux distributeurs sont placés côte à côte, on désigne l'un par G (gauche) et l'autre par D (droite). Vingt cinq personnes se présentent successivement pour sortir une boisson. On désigne par « séquence » la suite des choix successifs des usagers mise sous la forme : GDGGD … GGD (25 lettres G ou D).

1. Combien y – a – t – il de séquences distinctes possibles ?
2. Combien y – a – t – il de cas où dix usagers se sont servis au distributeur de gauche ?

Exercice 2

Un appareil de contrôle électronique nécessite d'être réparé rapidement. On lui a donc donné une conformation modulaire comprenant 10 modules numérotés de 1 à 10. En cas de panne, on cherche le (les) module(s) défaillant(s) et on le remplace. On suppose que tous les modules peuvent tomber en panne. On note : {1} ; {2,5} ; {3,7,8} les pannes où les modules défaillants sont indiqués.



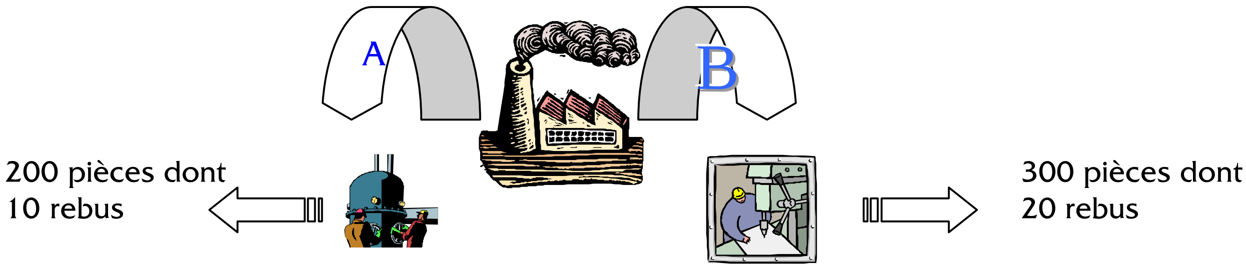
1. Combien de types de pannes peut – il se produire ?
2. Combien peut – il se produire des pannes :
   a) contenant 3 modules ?
   b) De pannes concernant 3 modules dont le module 7 ?
   c) De pannes concernant 3 modules sauf les modules 1 et 2 ?
3. Combien peut – il se produire de pannes différentes sachant qu'il ne peut y avoir plus de 3 modules en panne simultanément ?
4. Combien peut – il se produire de pannes différentes sachant que les modules 2 et 3 tombent en panne simultanément ?

Exercice 3

Un lot de 100 pièces manufacturées comprend 5 pièces défectueuses. On considère des groupes de 10 pièces du lot.

1. Combien y – a – il de groupes différents formés de 10 pièces de ce lot ?
2. Combien y en a – t – il ne contenant aucune pièce défectueuse ? Une pièce défectueuse ?
3. Combien y en a – t – il contenant plus de 3 pièces défectueuses ?

Exercice 4



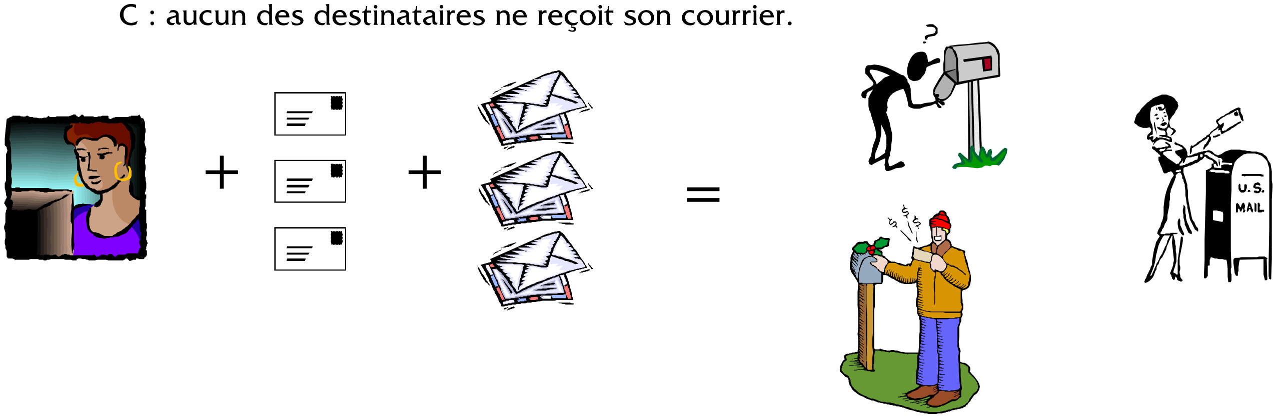
Une entreprise dispose de deux machines A et B. A produit 200 pièces et B 300 pièces ; 10 pièces produites par A et 20 pièces produites par B sont défectueuses. La totalité des deux productions comprenant les pièces défectueuses a été mélangée par erreur. On prélève 100 pièces du lot total. On répondra aux questions sous forme de formules.

1. Combien y a – t – il de prélèvements différents possibles (ne comprenant pas exactement les mêmes pièces) ?
2. Combien y en a – t – il ne comprenant que des pièces provenant de A ?
3. Combien y en a – t – il ne comprenant que des pièces non défectueuses ?
4. Combien y en a – t – il comprenant exactement 5 pièces défectueuses ?
5. On considère les nombres N_5, N_6, N_7 de prélèvements contenant 5, 6 ou 7 pièces défectueuses. Montrer que N_6 est plus grand que N_5 et N_7.

Exercice 5

Une secrétaire colle au hasard 3 étiquettes portant des adresses différentes sur 3 enveloppes. Quelles sont les probabilités P (A), P (B) et P (C) des événements suivants ?

A : chaque destinataire reçoit l'enveloppe qui lui était destinée.
B : un seul destinataire reçoit son courrier.
C : aucun des destinataires ne reçoit son courrier.



II] CALCUL DES PROBABILITES :

1°) Langage des probabilités :

- ✓ **Univers** : ensemble $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots\}$ d'éventualités ou de possibles.
- ✓ **Evénement** : partie de l'univers Ω donc ensemble d'éventualités.
- ✓ **Ensemble des événements** : ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω.
- ✓ **Evénement élémentaire** : événement ne comportant qu'une seule éventualité.
- ✓ **Evénement certain** : ensemble Ω de toutes les éventualités.
- ✓ **Evénement impossible** : ensemble vide $\emptyset$ (ne comportant aucune éventualité).
- ✓ **Evénement contraire de A** : complémentaire $\overline{A}$ de A (dans Ω).
- ✓ **Evénement somme** (disjonction) de deux événements A et B : réunion des événements A et B. On note : $A \cup B$, A ou B, A + B.
- ✓ **Evénement produit** (conjonction) de deux événements A et B : intersection des événements A et B. On note : $A \cap B$, A et B,A B.
- ✓ **Implication** : A implique B ssi $A \subset B$.

2°) Définition d'une probabilité sur un univers fini :

Soit Ω un univers fini. On dit que cet univers est probabilisé si l'on a défini une fonction P de l'ensemble $P(\Omega)$ des événements de Ω dans l'intervalle [0 ;1] définissant pour tout élément A une probabilité P(A), telle que :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour tous événements incompatibles A et B.

$P(\Omega) = 1$.

Probabilité :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Equiprobabilité :

Tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Si l'univers comporte n éventualités, la probabilité de chacun est $\frac{1}{n}$.

3°) Formules courantes :

Quels que soient les événements A, B, …, C incompatibles deux à deux :

$$P(A\cup B \cup \ldots \cup C) = P(A) + P(B) + \ldots + P(C)$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad\qquad P(\emptyset) = 0$$

A et B étant deux événements quelconques :

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A\cup B) = P(\overline{A \cup B})$$

4°) Probabilités conditionnées :

Sachant que A est réalisé, la nouvelle valeur de la probabilité de B est dite probabilité de B conditionnée par A (ou sachant A) est notée $P_A(B)$ ou $P(B/A)$ est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

5°) Indépendance en probabilité de deux événements :

A et B étant deux événements d'un même univers Ω, on dit que B est indépendant de A si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Propriétés :

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $\qquad$ $P_B(A) = P(A)$

Soit le tableau de probabilités ci dessous :

	A	$\overline{A}$
B	p	r
$\overline{B}$	q	s

A et B sont indépendants ssi les probabilités par colonne (ou par ligne) sont proportionnelles. (ps = qr)

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1 – Classement de dossiers

On donne à une secrétaire 15 dossiers dont 6 comportent un avis favorable et 9 un avis défavorable. Les 15 dossiers ont été classés au hasard. On demande la probabilité des événements suivants :

1. Le premier dossier est favorable et le second est défavorable.
2. Les deux premiers dossiers sont favorables.
3. Les deux premiers dossiers sont défavorables.
4. Il y a au moins un dossier défavorable dans les deux premiers.
5. Il y a 3 dossiers favorables et 5 défavorables dans les 8 premiers.

RESOLUTION

1. card $\Omega = 15x14 = 210$.
   Le nombre de cas favorables : nombre de couples dont la première coordonnée peut prendre 6 valeurs et la seconde 9 soit 6x9=54.
   La probabilité demandée est donc : $\frac{54}{210} \approx 0{,}26$

2. Le nombre de cas favorables : nombre de couples dont la première coordonnée peut prendre 6 valeurs et la seconde 5 soit 6x5=54.
   La probabilité demandée est donc : $\frac{30}{210} \approx 0{,}14$.
   On a aussi $\frac{C_6^2}{C_{15}^2} \approx 0{,}14$.

3. Nombre de cas réalisant l'événement : 9x8 = 72 Probabilité : $\frac{72}{210} \approx 0{,}34$.

4. Il y a soit un soit deux dossiers défavorables. Le cas où c'est le premier dossier qui est défavorable (le second est favorable) donne comme au 1°) 54 cas favorables et une probabilité de 0,26.
   Au total par addition des cas (et donc des probabilités) :
   La probabilité est de 0,26 + 0,26 + 0,34 = 0,86
   Rq : l'événement contraire est celui de deux dossiers favorables de probabilité 0,14 et donc le résultat 1-0,14 = 0,86 est plus rapide.

5. On raisonne par combinaisons :
   Nombre de cas possibles : C_{15}^8

   → Probabilité : $\frac{C_6^3 x C_9^5}{C_{15a}^8} \approx 0{,}39$

   Nombre de cas favorables : C_6^3 x C_9^5

Exercice 2 - Probabilité de pannes sur un circuit

1. Un circuit électronique est formé de 10 éléments identiques installés en série. Chaque élément a une probabilité égale à 0,02 de tomber en panne pendant les 1000 premières heures de fonctionnement.

Quelle est la probabilité p_1 pour que le circuit tombe en panne pendant les 1000 premières heures ?

2. Un autre circuit est composé de n cellules (n > 1) formées de deux éléments identiques aux précédents et montés en parallèle (si bien que le circuit fonctionne dès qu'un élément de chaque cellule fonctionne).

a) Quelle est la probabilité p_2 pour qu'une cellule tombe en panne dans les 1000 premières heures ?

b) Quelle est la probabilité p_3 pour que le circuit tombe en panne dans les 1 000 premières heures ?

c) À partir de quelle valeur de l'entier naturel n le second circuit est-il moins fiable que le premier ?

RESOLUTION

1. L'état de fonctionnement d'un élément est indépendant de celui des autres éléments. La probabilité pour que le circuit ne tombe pas en panne est donc : $q_1 = 0{,}98 \times 0{,}98 \times \ldots \times 0{,}98 = 0{,}98^{10} = 0{,}817$.

La probabilité demandée est donc : $p_1 = 1 - 0{,}98^{10} = 0{,}183$.

Rq : nous n'avons pas les probabilités simultanées (du type cellule 1 et cellule2 en panne), il faut donc passer par les probabilités des compléments.

2. a) La probabilité pour qu'une cellule tombe en panne est $p_2 = 0{,}02^2 = 4 \times 10^{-4}$.

b) La probabilité pour que le circuit fonctionne est la probabilité pour que les n cellules fonctionnent. Elle vaut donc : $q_3 = (1 - 4 \times 10^{-4})^n = (1 - 0{,}0004)^n = 0{,}9996^n$.

La probabilité pour qu'il tombe en panne est donc $p_3 = 1 - q_3 = 1 - 0{,}9996^n$.

c) Le second circuit sera moins fiable que le premier si :

$$1 - 0{,}9996^n > 1 - 0{,}98^{10} \text{ ou } 0{,}9996^n < 0{,}98^{10}.$$

En prenant les logarithmes des deux membres, on obtient la condition

$n \ln 0{,}9996 < 10 \ln 0{,}98$ ou $n > 1\ 0 \times \ln 0{,}98$ (car $\ln 0{,}9996 < 0$)

soit $n > \dfrac{-0{,}202}{-0{,}0004}$ soit $n > 504{,}97$.

TD 1 – APPLICATION DU COURS
CALCULS DE PROBABILITES

Exercice 1

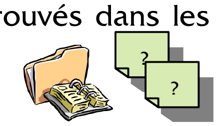
À la suite d'une étude statistique on a établi qu'un tireur « au pigeon » avait une probabilité 0,5 d'atteindre la cible à la 1ère cartouche, 0,2 à la 2ème cartouche et 0,3 de la manquer. Les probabilités sont valables pour chaque tir (événements indépendants).

1. Quelle est la probabilité de toucher la cible à l'occasion d'un tir ? (1 tir=2 cartouches)
2. Quelle est la probabilité sur deux tirs :
   a) de toucher 2 fois la cible (p2) ?
   b) de ne la toucher qu'une fois sur deux (p1) ?
   c) de la manquer deux fois (po) ?
   d) de toucher deux fois la cible à la 1ère cartouche ?
3. Quelle est la probabilité de réussir 4 tirs sur 5 ?

Exercice 2

Deux documents se sont égarés et on été rangés par erreur dans l'une des 12 chemises d'un dossier. On dispose de 5 chemises prises au hasard.

1. Quelle est la probabilité P2 pour que les 2 documents soient retrouvés dans les 5 chemises ?
2. La probabilité p1 pour qu'on y retrouve 1 seul des documents ?
3. La probabilité po pour qu'on n'en trouve aucun ? (Envisager 3 cas.)



Exercice 3

Dans une fabrication de N pièces, il y a k pièces défectueuses. On prélève au hasard et sans remise un échantillon de n pièces.

1. On prélève une seule pièce (n = 1). Quelle est la probabilité pour qu'elle soit défectueuse ?

2. On suppose dans la pratique N >> n et N>> n - k. Quelles sont les probabilités :

   a) de n'avoir aucune pièce défectueuse dans le lot (p_o)
   b) d'avoir une pièce défectueuse (p_l), deux pièces défectueuses (p_2), dans le lot ?
   c) d'avoir q pièces défectueuses (p_3) ?
   d) d'avoir toutes les pièces défectueuses (p_k) ?

Application numérique N = 20, k = 3, n = 5

On notera que l'on peut assimiler ce problème à celui du tirage sans remise de n objets dans une urne contenant N objets, dont k possèdent une caractéristique particulière (couleur, forme, défaut, numéro, ...)
C'est également le même problème que celui du tirage à une loterie comportant N numéros dont k gagnants avec n numéros achetés.