

Pour calculer une intégrale, on peut :

- Déterminer une primitive de la fonction à intégrer en utilisant directement le tableau des dérivées / primitives usuelles et les propriétés des primitives (vu en terminale).

ou

- Utiliser une des deux nouvelles méthodes suivantes :
 - o Méthode d'intégration par parties.
 - o Méthode du changement de variable.

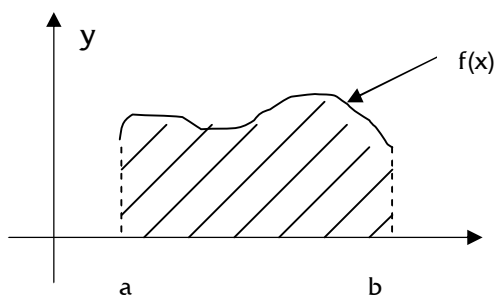
I] PROPRIETES DU CALCUL INTEGRAL :

Soit **f** une fonction à variable réelle **x**, définie sur **R**, on note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$

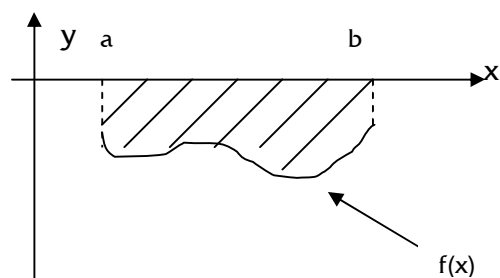
- $f'(x)$ est la dérivée première de la fonction **f**.
- $F(x)$ est la fonction primitive de la fonction **f**. On a $F'(x) = f(x)$
- L'intégrale de **a** vers **b** de **f(x)** se note : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Rappels :

1. En un point d'abscisse **a**, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction **f**.
2. Le **signe** de $f'(x)$ sur un intervalle **I** donne le **sens de variation** de la fonction **f** sur cet intervalle. Si $f'(x) > 0$ (< 0), **f** est croissante (décroissante).
3. $\int_a^b f(x)dx$ donne au(x) signe(s) près la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



$$\text{Aire hachurée} = + \int_a^b f(x)dx$$



$$\begin{aligned} \text{Aire hachurée} &= - \int_a^b f(x)dx \\ &= + \int_b^a f(x)dx \end{aligned}$$

Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Linéarité :

$$\int_a^b k.f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Positivité :

Si $a \leq b$ et si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction dérivable sur $[a ; b]$, M la plus grande valeur de $f(x)$ et m la plus petite valeur de $f(x)$ sur $[a ; b]$, il existe un nombre μ compris entre m et M tel que :

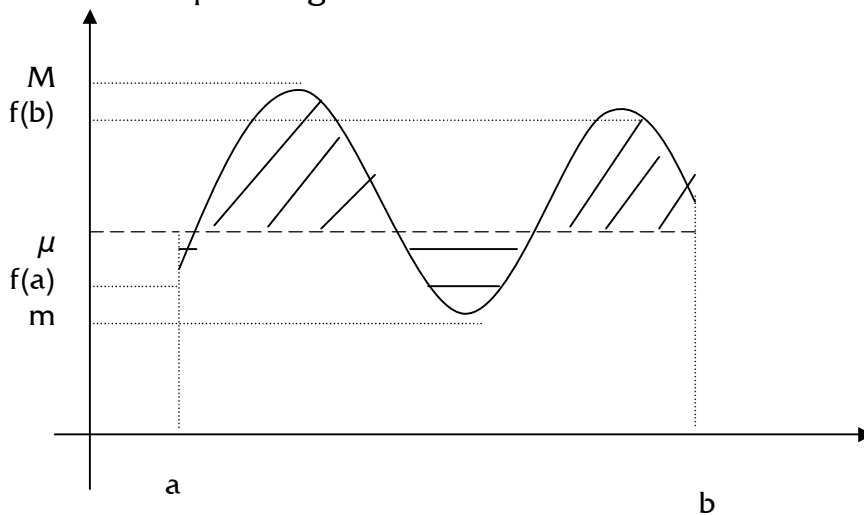
$$\int_a^b f(x) dx = \mu (b - a)$$

Définition : le nombre μ , défini par $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ s'appelle valeur moyenne de f sur $[a ; b]$

Interprétation géométrique ($f > 0$) :

Le nombre μ , défini par $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est tel que $\mu (b - a) = \int_a^b f(x) dx$

Donc l'aire du domaine limité par la courbe, l'axe (Ox) et les droites $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de dimension $(b - a)$ et μ ou bien l'aire hachurée en oblique est égale à l'aire hachurée horizontalement.



Inégalité des accroissements finis :

Pour une fonction f dont la dérivée est continue sur un intervalle I , s'il existe un réel M tel que pour tout x de I , $|f'(x)| \leq M$, alors quels que soient les réels a et b de I , on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$$

III] INTEGRATION PAR PARTIES :

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I dont les dérivées sont u' et v' . Le produit $u.v$ admet $u'.v + u.v'$ pour dérivée sur I .

$$\text{Soit } (u.v)' = u'.v + u.v'$$

Si on intègre cette égalité entre a et b , on obtient :

$$\int_a^b (u.v)' dx = \int_a^b u'.v dx + \int_a^b u.v' dx \quad \Leftrightarrow \quad [u(x) v(x)]_a^b = \int_a^b u'.v dx + \int_a^b u.v' dx$$

d'où la formule dite d'intégration par parties que l'on peut écrire de deux façons :

$$\int_a^b u'.v dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u.v' dx$$
$$\int_a^b u.v' dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'.v dx$$

Exemple 1 : calculer $\int_0^1 x e^{-x} dx$.

On pose $\begin{cases} u(x) = \dots\dots\dots \\ v'(x) = \dots\dots\dots \end{cases}$ on obtient : $\begin{cases} u'(x) = \dots\dots\dots \\ v(x) = \dots\dots\dots \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-x} dx &= \int_0^1 u(x).v'(x) dx \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

=.....

=.....

Exemple 2 : calculer $\int_1^e \ln(x) dx$

On pose $\begin{cases} u'(x) = \\ v(x) = \end{cases}$ on obtient : $\begin{cases} u(x) = \\ v'(x) = \end{cases}$

$$\int_1^e \ln(x) dx$$

=.....

=.....

=.....

=.....

=.....

=.....

=.....

III] INTEGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE :

1°) Changement de variable du type $u \mapsto t + b$; b réel donné

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a + b, b + b]$, on a :

$$\int_a^b f(t+b) dt = \int_{a+b}^{b+b} f(u) du$$

Méthode pratique pour le calcul de : $\int_a^b f(t+b) dt$

o On pose $u(t) = t + b$, on a alors $du = 1 \cdot dt$ soit $du = dt$.
Rq : on a aussi $t = u - b$ et $dt = du$

o On calcule les nouvelles bornes d'intégration :

$$u(a) = a + b \text{ et } u(b) = b + b$$

o D'où :

$$\int_a^b f(t+b) dt = \int_{a+b}^{b+b} f(u) du$$

Exemple : calculer $\int_0^1 \frac{dt}{t+2}$

On pose $u(t) = \dots\dots\dots$ d'où $\dots du = \dots\dots\dots$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{t+2} &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

2°) Changement de variable du type $u \mapsto at$; a réel donné non nul

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(at) dt = \frac{1}{a} \int_{aa}^{ba} f(u) du$$

Méthode pratique pour le calcul de $\int_a^b f(t+b) dt$

o On pose $u(t) = at$, on a alors $du = a dt$ (on a donc $dt = \frac{1}{a} du$.)

o On calcule les nouvelles bornes d'intégration :

$$u(a) = aa \text{ et } u(b) = ab$$

o D'où :

$$\int_a^b f(at) dt = \frac{1}{a} \int_{aa}^{ba} f(u) du$$

Exemple : calculer $\int_0^1 e^{3t} dt$

On pose $u(t) = 3t$ d'où $du = \dots\dots\dots$ et $dt = \dots\dots\dots$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{3t} dt &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

3°) Généralisation : $u \mapsto at$; a réel donné non nul

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a ; b]$ et l'intégrale

$I = \int_a^b f(x) dx$. Considérons une fonction y ayant sur l'intervalle $[a ; b]$

une dérivée continue et telle que l'image de $[a ; b]$ soit $[a ; b]$ avec $a = y(a)$ et $b = y(b)$, on démontre et on admet le résultat suivant :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f[y(t).y'(t)]dt$$

Exemple : calculer $\int_0^2 \frac{t}{(t+1)^2} dt$

On pose $u(t) = t+1$ d'où $du = \dots\dots\dots$

$$\int_0^2 \frac{t}{(t+1)^2} dt = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

Exemple : calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$

On pose $x = \sin u$ d'où ... $dx = \dots\dots\dots$

On a également $u = \dots\dots\dots$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$



TD 1 – RAPPELS ...

Dérivées – Primitives – Calcul Intégral



Exercice 1 – Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$1) f(x) = 12x^4 - 5x^2 + 3$$

$$3) f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$5) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$7) f(x) = \cos x + \sin x$$

$$2) f(x) = (2x+1)^2(x-1)$$

$$4) f(x) = \sqrt{6x+5}$$

$$6) f(x) = \frac{2x+1}{e^x}$$

$$8) f(x) = 3 \sin^2(2x + \frac{\pi}{6})$$

Exercice 2 – Calculer les primitives des fonctions suivantes

$$1) f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$3) f(x) = (x-1)^2$$

$$5) f(x) = x^2(x^3 - 1)$$

$$7) f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-3}} \text{ sur }]3/5; +\infty[$$

$$9) f(x) = \cos(3x - \frac{p}{4})$$

$$2) f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 5x^2 + 1$$

$$4) f(x) = (2x-3)^2$$

$$6) f(x) = \frac{3}{(4x+5)^3} \text{ sur } \mathbb{R} - \{-5/4\}$$

$$8) f(x) = \frac{6x-9}{x^2-3x+2} \text{ sur } \mathbb{R} - \{1; 2\}$$

$$10) f(x) = 2 \sin(4x + \frac{p}{3})$$

Exercice 3 – Calculer les intégrales suivantes

$$1) \int_0^1 (x^2 - 3x + 9) dx$$

$$2) \int_1^3 (2x-1)^2 dx$$

$$3) \int_{-2}^4 (x^2 + 4x - 1)(x+2) dx$$

$$4) \int_{-3}^{-2} -\frac{3}{t^2} dt$$

$$5) \int_2^3 \frac{1}{(4-3x)^3} dx$$

$$6) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(2x+1)}} dx$$

$$7) \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{20}{3}} \sqrt{3x+5} dx$$

Réponses aux exercices

Exercice 1

$$1) 48x^3 - 10x$$

$$2) (2x+1)(4x-1)$$

$$3) \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$4) \frac{3}{\sqrt{6x+5}}$$

$$5) \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$6) \frac{1-2x}{e^x}$$

$$7) -\sin x + \cos x$$

$$8) 12 \cos(2x + \frac{\pi}{6}) \sin(2x + \frac{\pi}{6})$$

Exercice 2 (c désigne un nombre réel quelconque)

$$1) \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + c \quad 2) \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + x + c \quad 3) \frac{1}{3}(x-1)^3 + c \quad 4) \frac{1}{6}(2x-3)^3 + c \quad 5) \frac{1}{6}(x^3-1)^2 + c$$

$$6) \frac{-3}{8(4x+5)^3} + c \quad 7) \frac{2\sqrt{5x-3}}{5} + c \quad 8) 3 \ln|x^2-3x+2| + c \quad 9) \frac{1}{3} \sin(3x - \frac{p}{4}) + c \quad 10) \frac{-\cos(4x + \frac{p}{3})}{2} + c$$

Exercice 3

$$1) \frac{47}{6}$$

$$2) \frac{62}{3}$$

$$3) 234$$

$$4) -\frac{1}{2}$$

$$5) -\frac{7}{200}$$

$$6) \sqrt{3} - 1$$

$$7) 26$$



TD 2 – APPLICATION DU COURS INTEGRATION PAR PARTIES



Calculer les intégrales suivantes (par parties)

$$I = \int_{-3}^0 (x+1) e^{-x} dx$$

$$J = \int_0^2 (-2x+4) e^x dx$$

$$K = \int_0^1 \ln(x+3) dx$$

$$L = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

$$M = \int_1^3 t \ln t dt$$

$$N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$$

$$O = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \quad \text{On effectuera deux intégrations par parties successives.}$$

$$P = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin 4x dx \quad \text{On effectuera deux intégrations par parties successives.}$$

Résultats :

I	$-2 - e^3$	M	$\frac{9}{2} \ln 3 - 2$
J	$J = 2e^2 - 6$	N	$\frac{p}{2} - 1$
K	$4 \ln 4 - 3 \ln 3 - 1$	O	$\frac{e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}}{2}$
L	$\frac{2e^3 + 1}{9}$	P	$\frac{4(1 - e^{-p})}{17}$



TD 3 – APPLICATION DU COURS INTEGRATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE



Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable donné.

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+5}}$$

On posera $u = 3x + 5$

$$J = \int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x} dx$$

On posera $u = x^2 + 2x$

$$K = \int_{-1}^0 t \sqrt{t+2} dt$$

On posera $u = t + 2$

$$L = \int_{-1}^1 (1-x) \sqrt{1-x^2} dx$$

On posera $x = \cos t$

$$M = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

On posera $x = \cos t$

$$N = \int_3^4 \frac{t+1}{(t-2)^2} dt$$

On posera $x = t - 2$

$$O = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

On posera $x = \tan t$

Résultats :

I	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	M	$\frac{p}{2} - 1$
J	$\frac{e^3 - 1}{2}$	N	$\ln 2 + \frac{3}{2}$
K	$\frac{-16\sqrt{2} + 14}{15}$	O	$\frac{p+2}{8}$
L	$\frac{p}{2}$		

Exercice 2

1. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{p}{w}} t \sin(wt) dt$ avec $w > 0$.

2. Vérifier que I est la partie imaginaire de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{p}{w}} t e^{iwt} dt$

3. Calculer J à l'aide d'une intégration par parties. Retrouver ainsi le résultat de la première question.

Résultats partiels :

1. $I = \frac{p}{w^2}$

2. /

3. /



TD 4 – DU COTE DE L'EXAMEN ...



Exercice 1 – D'après BTS MAVA 1997

Exercice 1 – Partie B – 4°)

A l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'aire exprimée en cm^2 du domaine limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 0$. Donner la valeur de cette aire arrondie au mm^2 .

Données : $f(x) = 2e^{2x}(1 - 2x)$ et (C) est la courbe représentative de f.

Exercice 2 – D'après BTS MAVA 2000

Exercice 2 – Partie B – 4°)

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$I = \int_0^3 \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x} dx$$

REPONSES

Exercice 1

$$\frac{2(e^4 - 3)}{e^4}$$

Exercice 2

$$\frac{e^6 - 3}{e^6}$$



TD 5 – A REALISER EN AUTONOMIE ...



Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_1^4 \ln\left(\frac{5-x}{2x}\right) dx \quad (\text{par parties}) \quad J = \int_{-1}^1 (1-x) \sqrt{1-x^2} dx \quad (\text{poser } x = \cos t)$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt \quad (\text{on pourra utiliser } \cos^3 t = \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t) \quad L = \int_1^x t \ln \frac{t}{t+1} dt, x > 1 \quad (\text{par parties})$$

Exercice 2

1. Démontrer que pour tout réel x on a :

$$\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$$

2. Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$.

3. Soit l'intégrale $J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx$. A l'aide d'une intégration par parties et en utilisant les résultats précédents calculer J .

RESULTATS

Exercice 1

$$I = -3 \ln 2 \quad J = \frac{p}{2} \quad K = \frac{2}{3} \quad L = \frac{1}{2} \left(x^2 \ln \frac{x}{x+1} + \ln(x+1) - x + 1 \right)$$

Exercice 2

1. /

2. $I = e - 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

3. Par parties, on obtient $J = e \ln(1+e) - e + 1 + \ln\left(\frac{1+e}{4}\right)$

DEVOIR A LA MAISON 3 INTEGRATION PAR PARTIES ET PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

EXERCICE I (d'après BTS MAVA 1998) 8 points

Soit la fonction f définie par $f(t) = (2t^2 - 3t)e^t$

- 1) Donnez D_f , calculez $f'(t)$ puis établissez le tableau de variation de f .
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(t) = 0$.
- 3) Tracer (C) la représentation graphique de f , pour $t \in [-5;5]$
- 4) A l'aide d'une double intégration par parties, calculer :

$$\int_0^x (2t^2 - 3t)e^t dt, \text{ où } x \text{ est un réel différent de } 0.$$

5) Soit $A(a)$ l'aire du domaine plan défini par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = -a$.

Calculer en cm^2 $A(a)$ pour $a = 2$

EXERCICE II (d'après BTS MAVA 1997) – 12 points

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$, sa courbe représentative est donnée en annexe 1.

Une plaque P est limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

La partie A propose le calcul de l'aire de la plaque P . Cette plaque étant supposée homogène, le calcul de son moment d'inertie par rapport à l'axe des ordonnées se ramène au calcul de l'intégrale $J = \int_0^1 x^2 f(x) dx$ qui est proposé dans la partie B

PARTIE A

- 1) On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$. En utilisant le changement de variable donnée par $x = 2 \sin t$, calculer I .

- 2) Calculer l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.

En déduire l'aire A , en cm^2 de la plaque P . On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie à 0,01 près (hachurer A sur le graphique).

PARTIE B

- 1) A l'aide d'une double intégration par parties, calculer :

$$K = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

- 2) On considère l'intégrale

$$L = \int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

En utilisant la méthode du changement de variable calculer L.

- 3) En utilisant les résultats précédents, calculer l'intégrale $J = \int_0^1 x^2 f(x) dx$. On donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie à 0,01 près.

ANNEXE 1 – EXERCICE I

