

CHAPITRE III LES PROPORTIONS ET LES PARTAGES PROPORTIONNELS

I | DEFINITION :

Une proportion est une égalité de deux rapports (un rapport est une fraction, un quotient).

Exemple : $\frac{3}{5} = \frac{3,6}{6}$ est une proportion car $3 : 5 = 0,6$ et $3,6 : 6 = 0,6$

Les nombres 3 et 6 sont les

Les nombres 5 et 3,6 sont les

II | PROPRIETES :

- Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Dans l'exemple du haut :

Produit des extrêmes : $3 \times 6 = 18$

Produit des moyens : $5 \times 3,6 = 18$

- On peut permuter les extrêmes, on obtient dans ce cas une proportion différente de la première :

$$\frac{6}{5} = \frac{3,6}{3} \quad \frac{6}{5} = 1,2 \text{ et } \frac{3,6}{3} = 1,2$$

- On peut permuter les moyens, on obtient dans ce cas une proportion différente des deux autres :

$$\frac{3}{3,6} = \frac{5}{6} \quad \frac{3}{3,6} = 0,83 \text{ et } \frac{5}{6} = 0,83$$

III | CALCUL D'UN TERME D'UNE PROPORTION :

Exemple 1: calculer x tel que :

$$\frac{x}{9} = \frac{8}{5}$$

On utilise un tableau et on fait un produit en croix. Le trait horizontal représente le signe égal et le trait vertical représente le trait de fraction.

x	8
9	5

$$x = \frac{8 \times 9}{5} = \frac{72}{5} = 14,4$$

Exemple 2 : trouver x tel que $\frac{x+1}{4} = \frac{3}{5}$

x+1	3
4	5

$$x + 1 = \frac{3 \times 4}{5}$$

$$x + 1 = \frac{12}{5}$$

$$x = \frac{12}{5} - \frac{5}{5}$$

$$x = \frac{7}{5}$$

Exemple 3 : Moyenne proportionnelle

Trouver y tel que :

$$\frac{y}{16} = \frac{4}{y}$$

Le nombre x cherché est le même pour les deux fractions (sinon il y aurait une infinité de solutions) ce nombre c'est **la moyenne proportionnelle**.
Pour calculer ce nombre on utilise la propriété :

Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, ce qui fait :

$$y \times y = 4 \times 16.$$

$$y^2 = 64 \text{ donc } y = \sqrt{64} = 8$$

y au carré racine carrée de 64

LES CARRES ET LES RACINES CARREES

- **Le carré** d'un nombre X est noté X^2 . Le carré d'un nombre est ce nombre multiplié par lui même donc $X^2 = X \times X$.

Exemples : $3^2 = 3 \times 3 = 9$ $4^2 = 4 \times 4 = 16$ $2^2 = 2 \times 2 = 4$

$3^2 \text{ n'est pas égal à } 3 \times 2$

- **La racine carrée** d'un nombre x notée \sqrt{x} est l'inverse du carré, c'est à dire que si on met au carré la racine carrée d'un nombre x on retrouve ce nombre x.

Exemples : $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 3 \times 3 = 9$ $\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$ $\sqrt{16} = 4$ car $4^2 = 16$

IV] SUITES ET GRANDEURS PROPORTIONNELLES :

Deux suites sont proportionnelles si on passe de l'une à l'autre en multipliant (ou en divisant) tous les termes par un même nombre.

Ce nombre s'appelle **coefficient de proportionnalité** ou **coefficient multiplicateur**.

Exemple : le prix en F d'un article est proportionnel à son poids en kg

Masse (kg)	1	2	3	4	5
Prix (F)	5	10	15	20	25

Effectuons les divisions suivantes :

$$\begin{aligned} 1 : 5 &= 0,2 \\ 2 : 10 &= 0,2 \\ 3 : 15 &= 0,2 \\ 4 : 20 &= 0,2 \\ 5 : 25 &= 0,2 \end{aligned}$$

On a donc $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = \frac{5}{25}$ ce qui nous montre que les deux suites sont proportionnelles.

Cherchons le coefficient de proportionnalité :

:M	Poids (kg)	1	2	3	4	5	x M
	Prix (F)	5	10	15	20	25	

On peut calculer le prix à partir d'un poids en multipliant par le coefficient de proportionnalité M.

On peut calculer le poids à partir d'un prix en divisant par le coefficient de proportionnalité M.

Pour calculer M on divise un prix par un poids:

$$M = \frac{15}{3} = 5$$

Exemple : Trouver M

:M	Masse (kg)	3	3,5	5	4	5	xM
	Prix (F)	12	16	20	20	25	

On vérifie que les deux suites sont proportionnelles :

.....

On calcule M :

.....

V | PARTAGES PROPORTIONNELS :

Exemple 1 :

On veut partager une somme de 10 000 F entre 3 employés proportionnellement au nombre d'enfants de chaque salarié: 2, 3 et 5 enfants.

On appelle A, B et C la part de chacun et on construit le tableau suivant :

				TOTAL	xM
Nombre d'enfants	'''	'''	'''	'''	
Part en Francs	A	B	C	'''	

$M = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

Donc :

A = = F
 B = = F
 C = = F

Exemple 2 :

Un oncle a laissé à ses 3 neveux un héritage de 714 000 F. Cette somme doit être partagée :

- Proportionnellement au nombre d'enfants de chaque neveu.
- Proportionnellement à l'âge de chaque neveu.

Sachant que :

- Albert a 50 ans et 2 enfants.
- Bruno a 3 enfants et 45 ans.
- Cédric a 5 enfants et 33 ans.

Quelle est la part en francs de chaque neveu ?

On appelle A, B et C la part de chacun et on construit un seul tableau :

	ALBERT	BRUNO	CEDRIC	TOTAL
Nombre d'enfants	2	3	5	
Age	50	45	33	
Nombre d'enfants X Age	'''	'''	'''	''''
Part en Francs	A	B	C	''''''''



$$M = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

Donc :

$$A = \dots = \dots F$$

$$B = \dots = \dots F$$

$$C = \dots = \dots F$$

V | PARTAGES INVERSEMENT PROPORTIONNELS :

Exemple 1 :

On veut partager une somme de 1 950 F entre 3 employés **inversement proportionnellement** à leurs jours d'absence dans l'entreprise : 2, 5 et 6 jours.

On appelle A, B et C la part de chacun et on construit le tableau suivant :

	ALBERT	BRUNO	CEDRIC	TOTAL
Jours d'absence	
Inverse des Jours d'absence
Part en Francs	A	B	C

x M

.....
.....

$$M = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

Donc :

$$A = \dots = \dots \text{ F}$$

$$B = \dots = \dots \text{ F}$$

$$C = \dots = \dots \text{ F}$$

Autre méthode : après avoir trouvé le dénominateur commun ici, on réduit les fractions au même dénominateur et on l'enlève, ce qui donne dans le tableau :

15	6	5	26
A	B	C	1 950

x M

$$M = 1\,950 : 26 = 75$$

$$\text{Donc } A = 15 \times 75 = 1\,125 \text{ F}$$

$$B = 6 \times 75 = 450 \text{ F}$$

$$C = 5 \times 75 = 375 \text{ F}$$

FEUILLE D'EXERCICES 1

I | Indiquez si les égalités suivantes sont des proportions (si oui pourquoi) :

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{9}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{12}{14}$$

$$\frac{15}{17} = \frac{45}{41}$$

$$\frac{11}{13} = \frac{22}{36}$$

$$\frac{13}{21} = \frac{42}{26}$$

II | Les proportions suivantes sont - elles vraies ? (si oui pourquoi) :

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$$

III | Les proportions suivantes sont - elles vraies ? (si oui pourquoi) :

$$\frac{7}{9} = \frac{21}{27}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{11} = \frac{15}{33}$$

$$\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$$



FEUILLE D'EXERCICES 2**I] Complétez les égalités suivantes:**

$$\frac{\square}{3} = \frac{12}{36}$$

$$\frac{14}{\square} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{\square}{28}$$

$$\frac{75}{36} = \frac{25}{\square}$$

$$\frac{\square}{4} = \frac{16}{\square}$$

II] Complétez les proportions suivantes:

$$\frac{\square}{6} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{\square}{10}$$

$$\frac{3}{\square} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{\square}{9} = \frac{4}{\square}$$

$$\frac{2}{\square} = \frac{\square}{8}$$

III] Complétez les proportions suivantes:

$$\frac{\square}{4} = \frac{6}{8}$$

$$\frac{4}{\square} = \frac{12}{15}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{\square}{24}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{14}{\square}$$

$$\frac{\square}{16} = \frac{4}{\square}$$

$$\frac{4}{\square} = \frac{\square}{25}$$



FEUILLE D'EXERCICES 3

I] Indiquez si les suites sont proportionnelles et dans ce cas donnez le coefficient de proportionnalité:

Suite A	1	2	4	10	15	20	25	50
Suite B	2,5	5	10	25	37,5	50	62,5	125

II] Indiquez si les suites sont proportionnelles et dans ce cas donnez le coefficient de proportionnalité:

Suite 1	-6,5	-4,5	-2,5	8	10,5	13	17	27,5
Suite 2	-22,75	-15,75	-8,75	28	36,75	45,5	59,5	96,25

III] Complétez le tableau afin d'obtenir deux suites proportionnelles :

Suite 1		7	9	14			25	x
Suite 2	15,6	36,4			88,4	119,6		

IV] Complétez le tableau afin d'obtenir deux suites proportionnelles :

Suite 1		7		-12,3		15,6		x
Suite 2	21,6		48	59,04	70,56		-92,16	

V] Trouvez a, b, c et d dans ce tableau de proportionnalité:

a	-8	4,2	c	18,7	x
3	b	7	-11,2	d	

VI] Complétez le tableau de proportionnalité ci-dessous:

2	3			7	9		x
10		25	30			11	

VII] Complétez le tableau de proportionnalité ci-dessous:

1	3		5		8	12	x
9		36		54			

FEUILLE D'EXERCICES 4

I] Partagez A proportionnellement à a, b et c :

- 1) $A = 7\,440$, $a = 3$, $b = 4$ et $c = 5$.
- 2) $A = 7\,350$, $a = 5$, $b = 7$ et $c = 9$.
- 3) $A = 2\,886$, $a = 7$, $b = 13$ et $c = 17$.

II]

Deux nombres ont pour somme 60 ; ils sont proportionnels à 5 et 7.
Calculez ces deux nombres.

III]

Deux nombres ont pour somme 135 ; ils sont proportionnels à 7 et 8.
Calculez ces deux nombres.

IV]

Deux nombres ont pour différence 130 ; ils sont proportionnels à 12 et 7.
Calculez ces deux nombres.

V]

Deux nombres ont pour différence 65 ; ils sont proportionnels à 4 et 9.
Calculez ces deux nombres.

VI]

Un employeur décide de partager une prime de 8 000 F entre trois employés. La répartition se fait proportionnellement à l'ancienneté de chacun d'eux.

Quelle est la part de chacun sachant qu'ils ont 5, 7 et 10 ans d'ancienneté ?

FEUILLE D'EXERCICES 5**I]**

Un couple gagne 500 000 F au Millionnaire. Ils décident d'en garder la moitié et de partager l'autre moitié à leurs trois enfants, Alain, Bernard et Françoise de manière proportionnelle :

- Au nombre d'enfants de chacun : 2 pour Alain 3 pour Bernard et 4 pour Françoise.
- A l'âge de chaque enfant : 26 ans pour Alain 30 ans pour Bernard et 25 ans pour Françoise.

Quelle est la part de chacun ?

**II]**

Trois familles louent ensemble une maison pour leurs vacances et se partagent le prix de la location de manière directement proportionnelle à leur nombre d'enfants et à la durée de leur séjour.

- La famille A à 3 enfants et reste 22 jours.
- La famille B à 2 enfants et reste 27 jours.
- La famille C à 4 enfants et reste 15 jours.



Sachant que la famille A a payé 2 310 F, quel est le prix total de la location ? Que payeront chacune des familles.

III] Partagez :

558 F en 3 parties inversement proportionnellement à 2, 3 et 5.

IV] Partagez :

1 428 F en 3 parties inversement proportionnellement à $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ et $\frac{10}{7}$.

V]

Une entreprise accorde une prime de vacances à chacun de ses 3 salariés. Il est convenu que cette prime sera inversement proportionnelle aux nombres de jours d'absence de chacun dans l'année. Sachant que le premier a 2 jours d'absence, le deuxième a 3 jours d'absence et le troisième à 4 jours d'absence, quelle est la part pour chaque employé si la prime à partager s'élève à 8 385 F ?

VI]

Partager une somme de 8 670 F entre 3 employés de façon à la fois :

- Directement proportionnelle aux années de présence dans l'entreprise : 4, 5 et 6.
- Inversement proportionnelle aux jours d'absence : 4, 3 et 2.

LES ECHELLES

I] DEFINITIONS :

- Une échelle est utilisée avec une représentation (schéma technique, carte routière etc.) pour donner la correspondance entre la mesure en et la mesure sur
- Toute représentation avec une échelle respecte les On pourra donc retrouver les dimensions réelles à partir des dimensions du schéma en utilisant des
- On représente une échelle par une, généralement avec un au numérateur. (Exemples : 1/20 000 ; 1/10 000 ; 4/1 etc .)
Lorsque l'échelle est représentée sous la forme d'une fraction, les unités doivent être identiques :

Echelle = _____

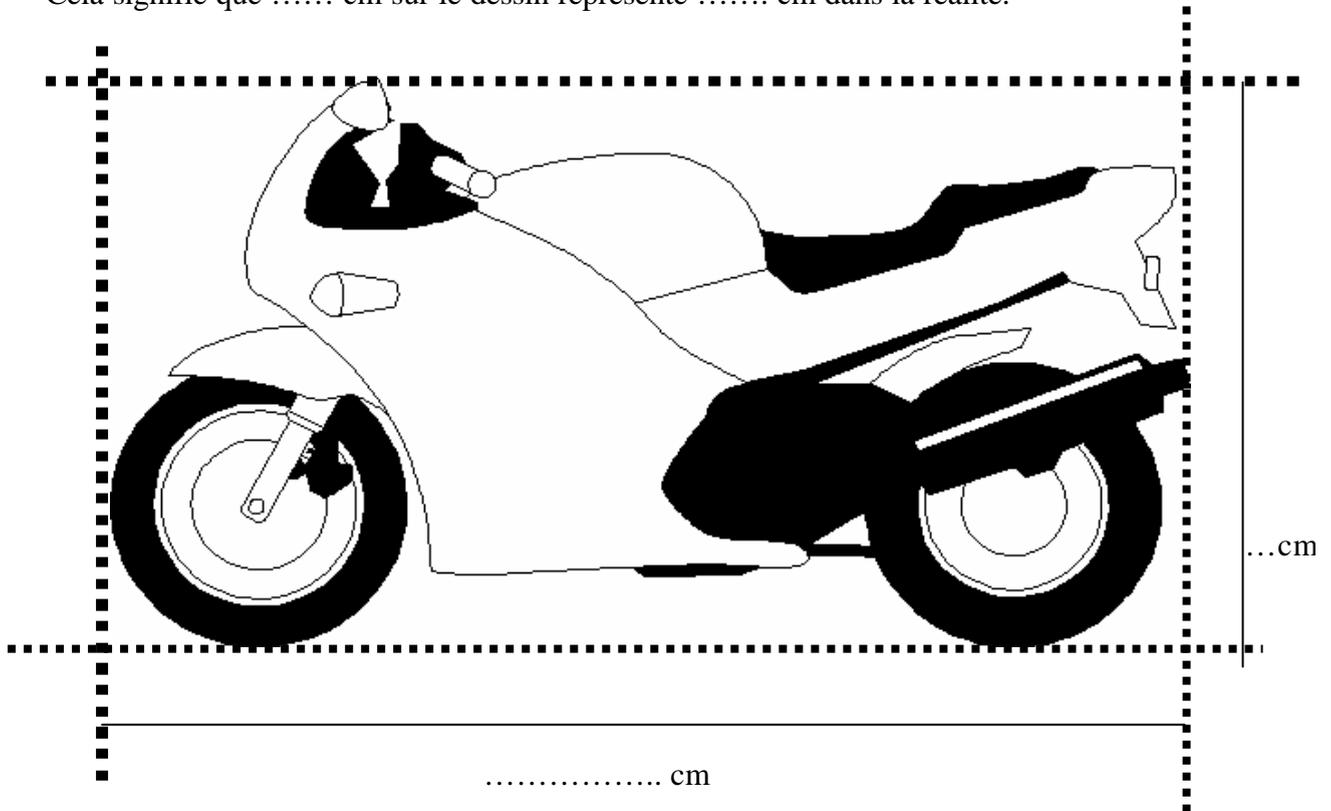
Exemple : 1,2 / 500 000 signifie que :

.....

- L'échelle peut être égale à 1, c'est à dire que c'est un dessin
- L'échelle peut être inférieure à 1, c'est à dire que c'est un dessin
- L'échelle peut être supérieure à 1, c'est à dire que c'est un dessin

Exemple : La photographie suivante donne les dimensions d'une moto. Cette image est à l'échelle $\frac{1^e}{10}$

Cela signifie que cm sur le dessin représente cm dans la réalité.



Quelle est la longueur réelle de cette moto ?

1 cm sur le schéma représente 16 cm dans la réalité.

.... cm sur le schéma représentent cm dans la réalité.

Quelle est sa hauteur réelle de cette moto ?

1 cm sur le schéma représente 16 cm dans la réalité.

.... cm sur le schéma représentent cm dans la réalité.

La distance entre Châlons en champagne et Reims est de 53 km. A partir de cette information trouver l'échelle de cette carte et déterminez la distance entre Châlons en champagne et Tilloy et Bellay.